

# Financial Accelerator モデルの数値解析

王 芮\*

## 【要旨】

本稿では、Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) によって考案された Financial Accelerator モデル、いわゆる BGG モデルについて、その導出と解き方について解説を行い、パラメーターと外生変数の感応度分析を行う。金融市場の不完全性を表す動学マクロ経済モデルの定番として、BGG モデルを線形化された形で応用することは数多くの研究に見受けられている。それは、このモデルの定式化には複雑な確率関数が使用され、非線形の形でモデルの定常状態を求めるのは容易ではない、ということが一つの理由である。本稿では、Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) のニューケインジアン動学的確率的一般均衡のフレームワークを捨てて、借り手（企業）と貸し手（銀行）の間における最適債務契約で定義された静学的部分均衡モデルの形を取って、できる限りステップを省略せずに、Financial Accelerator モデルの導出、経済学的な解釈及び解き方について説明し、モデルの数値解析を行う<sup>1</sup>。

【キーワード】 金融市場の不完全性、Financial Accelerator モデル、最適債務契約、数値解析

---

\* 立正大学経済学部専任教員。E-mail : wangrui@ris.ac.jp

<sup>1</sup> 筆者が調べた限り、日本語で書かれた Financial Accelerator モデルの導出や解き方を解説する文献がほとんどない。そのため、李 (2018) の第 5 章、劉と蔣 (2018) の第 4 章など、日本語以外の文献を多く参考に行っている。

## 1 イントロダクション

2008年の世界金融危機以後、マクロ経済学では、金融市場の不完全性と実体経済の関連が広く意識されるようになり、金融市場の不完全性をニューケインジアン動学的確率的一般均衡（New Keynesian Dynamic Stochastic General Equilibrium, 以下、NK-DSGE）のフレームワークに導入して、金融市場と実体経済の関係を考察する研究は数多く行われてきた。この分野では、金融市場の不完全性は金融摩擦（Financial Friction）<sup>2</sup>と呼ばれ、それをモデリングする方法として、Costly State Verification（以下、CSV）理論、Collateral Constraints（以下、CC）理論や Costly Enforcement（以下、CE）理論がよく用いられている。

Townsend（1979）と Townsend（1988）によって提唱された CSV 理論及び最適債務契約理論を金融市場の不完全性に応用した先駆的な研究として、Bernanke and Gertler（1989）、Carlstrom and Fuerst（1997）がある。さらに、この分野では、Bernanke, Gertler and Gilchrist（1999）は上記の分析を NK-DSGE のフレームワークに統合して、現在、金融市場の不完全性を描写する動学マクロ経済モデルの標準形を作り出している。3人の著者の名前の頭文字を取って、このモデルは BGG モデルとも呼ばれている。このモデルでは、金融市場について、具体的に以下のように想定されている。貸し手と借り手の間における情報の不完全性があり、貸し手が借り手の投資行動の結果を直接観察することができない。さらに、借り手の投資が失敗して、銀行からの貸出を返済できず、デフォルト（債務不履行）に陥った場合、貸し手が債権を回収する際に、破産清算のモニタリングコストが発生する。そのため、貸し手にとって、貸出を安全に回収する保証がなく、貸出行動における完全なリスク回避が難しいと考えられていることから、貸し手は借り手に対して、融資の際に、外部融資のプレミアム（External Financial Premium, 以下、EFM）を要求して、貸出金利をリスクフリーの金利より高めに設定する。この EFM は借り手のバランスシートに関連して、純資産と負の相関関係がある

---

<sup>2</sup> 本稿では、「金融市場の不完全性」と「金融摩擦」を区別せずに使用する。

と仮定されている。純資産や資産価格が変動すると、借り手のバランスシートの状況が変わり、融資の際に、EFMがバランスシートの状況に応じて変動するため、借り手の融資コストも変動する。この融資コストの変動は借り手の投資判断に影響を与える。その結果、投資が変動し、総需要も変動する。このように、金融市場の不完全性が実体経済へ波及するメカニズムは Financial Accelerator として知られている。

CC理論では、借り手は所有資産の一定の割合を超えての借入れができないという担保制約に直面すると想定されている。その先駆的な研究として、Eston and Gersovitz (1981) と Kiyotaki and Moore (1997) がある。そのほか、Iacoviello (2005) と Monacelli (2008) は借入れに対する不動産の担保機能を取り上げ、不動産価格、景気循環と金融政策の関係を分析している。CE理論では、投資収益の回収にコストが発生し、借り手が投資収益の一部のみ回収して、残りが貸し手に持っていられるという設定となっている。いずれのアプローチにおいても、金融市場の不完全性は借り手と貸し手の間における最適債務契約の形で定義されている。CSV理論と違って、CC理論とCE理論では情報の非対称性が考慮されていないため、金融市場の不完全性が借入れ制約やインセンティブ制約といった簡単な形で与えられる。これらの制約が存在する際に、資産価格や純資産の変動によって、借り手にとって、融資可能な金額の変動が発生し、投資行動が変化する。CSV理論による金融不完全性のモデリングと比べて、CE理論とCS理論では、借り手の破産や債務不履行がなく、外部融資のリスクプレミアムが発生しない設定となっている。Brzoza-Brzezina, Kolasa and Makarski (2013) では、CSV理論による金融市場の不完全性とCC理論による金融市場の不完全性を標準的な中規模NK-DSGEモデルに組み込んで、インパルス応答関数、マクロ経済変数のモーメント統計量と景気循環の統計量の比較を通じて2つのアプローチを検討した結果、CSV理論による金融市場の不完全性を含むNK-DSGEモデルのパフォーマンスは実証エビデンスにもっと近いという結論が得られている。

上記の研究以外に、Gertler and Kiyotaki (2010) と Gertler and Karadi (2011) では、金融仲介機関（銀行）のエージェンシー問題によるバランスシート制約が金融市場の不完全性として導入されている。Gertler and Kiyotaki (2015) では、金融仲介

機関のバランスシート制約のほか、さらに Diamond and Dybvig (1983) で考案された銀行の取り付け騒ぎ (Bank Run) の可能性も考慮している。Christiano, Motto and Rostagno (2010) と Christiano, Motto and Rostagno (2014) は Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) を拡張して、後ほど紹介する資産の収益に対するショックの分布  $F(\tilde{\omega})$  の標準偏差  $\sigma$  をリスクショックとして定義し、アメリカの景気循環におけるもっとも重要な原因がこのリスクショックにあると結論付けている。Cúrdia and Woodford (2010) は貸出金利とリスクフリーの政策金利との金利差を内生化することで金融市場の不完全性を表している。Galí, López-Salido and Vallés (2004) と Galí, López-Salido and Vallés (2007) は一部の家計が金融市場にアクセスできず、借入れができないという家計の異質性の観点から金融市場の不完全性を取り上げている。Brunnermeier, Eisenbach and Sannikov (2013) では、金融市場の不完全性についての包括的なサーベイを出している。Galí (2015) の第 9 章では、標準形の NK-DSGE モデルに対する拡張として、金融市場の不完全性を取り上げている。また、李 (2018) の第 5 章及び劉と蔣 (2018) の第 4 章は、Financial Accelerator モデルを詳細に解説している。

## 2 Financial Accelerator モデルの導出

Financial Accelerator モデルでは、通常、貸出金利  $Z$  はリスクフリーの金利  $R$  に外部融資のプレミアム<sup>3</sup>を上乗せる形で決定される。外部融資のプレミアムは関数  $F\left(\frac{A}{N}\right)$  によって決定される。

$$Z = (1 + R) \times F\left(\frac{A}{N}\right), F'\left(\frac{A}{N}\right) > 0, F(1) = 1$$

ここでは、 $A$  と  $N$  はそれぞれ企業 (借り手) の総資産と純資産を表し、 $\frac{A}{N}$  が企業のレバレッジ率を表す。外部からの融資 (借入れ) を  $B$  で表すと、企業のバランスシートは  $A = N + B$  で表すことができる。総資産  $A$  が一定であれば、純資産  $N$  が少ないほど、より多くの外部融資  $B$  が必要になり、企業のレバレッジ

<sup>3</sup> ここでは、貸出金利  $Z$  がグロス金利で、リスクフリーの金利  $R$  がネット金利の形で定義されている。

率が高くなる。貸し手から見れば、少ない純資産しか保有していない借り手がより多くの借入れをしようとする場合のリスクが高く、その分、外部融資のプレミアムが上昇する。レバレッジ率が1である場合、企業が外部から資金を調達する必要がなく、貸出金利がリスクフリーの金利に一致する。外生ショックによる企業の純資産減少が発生する場合、企業のレバレッジ率が上昇するため、外部融資のプレミアムが上昇し、貸出金利が上昇する。企業にとって、外部融資のコストが膨らんでしまった結果、投資の減少、総需要の減少、失業の上昇、消費の落ち込みといった景気後退の連鎖が発生する。景気後退期において、資産価格が下落し、企業の資産価値が目減りすることになり、外部融資がさらに難しくなる。このように、外生ショックが金融市場から実体経済へ波及するフィードバックループメカニズムは BCG モデルにある Financial Accelerator の基本的な考え方である。このメカニズムでは、外生ショックが企業の投資プロジェクトの収益率に働きかけると仮定し、企業の投資収益に不確実性が導入されている。この不確実性の存在により、企業の投資が失敗し、投資収益が借入れの返済をカバーできない場合、債務不履行が発生し、企業が破産する。貸し手がモニタリングコストを払って、企業の投資収益を回収して、債務の返済に当てる。Financial Accelerator モデルでは、この不確実性が対数正規分布に従う確率変数  $\omega$  で導入されている。以下は対数正規分布と正規分布について説明する。

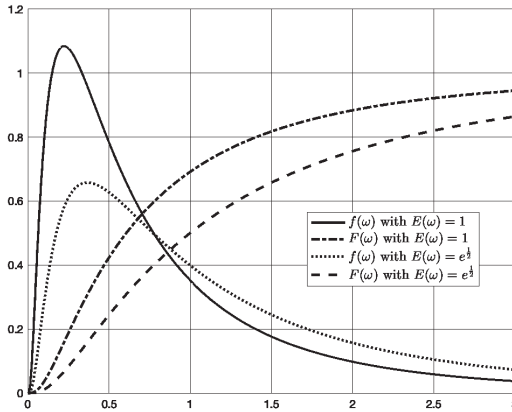
## 2.1 正規分布と対数正規分布

確率変数  $\omega$  が対数正規分布に従う場合、 $\log \omega$  が正規分布に従う。 $\log \omega \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  が成立する場合、 $\omega$  の確率密度関数は  $f(\omega) = \frac{1}{\omega\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\omega-\mu}{\sigma}\right)^2}$  で与えられ、 $\omega$  は対応する対数正規分布に従う。 $\omega$  の期待値  $\mathbb{E}[\omega]$  は

$$\mathbb{E}[\omega] = \int_0^{+\infty} \omega f(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} \omega \frac{1}{\omega\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\omega-\mu}{\sigma}\right)^2} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\omega-\mu}{\sigma}\right)^2} d\omega$$

で与えられる。変数  $z$  を  $\frac{\log\omega-\mu}{\sigma} = z$  で定義すると、 $\omega = e^{\sigma z + \mu}$  が成立する。 $\mathbb{E}[\omega]$  を計算するために、 $\omega \in (0, +\infty) \Rightarrow \log \omega \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow z \in (-\infty, +\infty)$  の変数変換により、定義域を変換する。

図 1  $\omega$  の確率密度関数  $f(\omega)$  と累積分布関数  $F(\omega)$



$$\mathbb{E}[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} de^{\sigma z + \mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2 + \sigma z + \mu} \sigma dz = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2} dz$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2} dz$$
 は  $z \sim \mathcal{N}(\sigma, 1)$  の確率密度関数であるため、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2} dz = 1$  が成立し、 $\mathbb{E}[\omega] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu}$  が成立する。 $\omega$  の二次モーメントも上記の変数変換によって計算できる。

$$\mathbb{E}[\omega^2] = \int_0^{+\infty} \omega^2 f(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} \omega^2 \frac{1}{\omega\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\omega-\mu}{\sigma}\right)^2} d\omega = e^{2\sigma^2 + 2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\sigma)^2} dz$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\sigma)^2} dz$$
 は  $z \sim \mathcal{N}(2\sigma, 1)$  の確率密度関数であるため、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\sigma)^2} dz = 1$  が成立し、 $\mathbb{E}[\omega^2] = e^{2\sigma^2 + 2\mu}$  が成立する。 $\omega$  の一次モーメント  $\mathbb{E}[\omega]$  と二次モーメント  $\mathbb{E}[\omega^2]$  を使って、 $\omega$  の分散  $\mathbb{V}[\omega]$  を以下のように計算する。

$$\mathbb{V}[\omega] = \mathbb{E}[\omega^2] - (\mathbb{E}[\omega])^2 = e^{2\sigma^2 + 2\mu} - e^{\sigma^2 + 2\mu} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Financial Accelerator モデルでは、投資収益に不確実性が存在し、その不確実性を  $\omega$  で表す。ただし、 $\omega$  は  $\int_0^{+\infty} \omega dF(\omega) = \int_0^{+\infty} \omega f(\omega) d\omega = 1$  を満たすと仮定されている。つまり、個別にショック（異質的なショック）が異なる値で実現する

表 1 対数正規分布と正規分布

正規分布	対数正規分布の平均	対数正規分布の分散
$N(\mu, \sigma^2)$	$e^{\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu}$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$
$N(-\frac{1}{2}, 1)$	$e^0 = 1$	$e - 1 \approx 1.7183$
$N(0, 1)$	$e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$	$e^2 - e \approx 4.6708$

が、平均的にそれが1であり、 $E[\omega] = 1$ が成立することから、 $\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu = 0$ と $V[\omega] = e^{\sigma^2} - 1$ も成立する。以上の関係を表1にまとめる。

## 2.2 関数 $F(\omega)$ , $G(\bar{\omega})$ と $\Gamma(\bar{\omega})$

Financial Accelerator モデルでは、 $\omega$ の累積分布関数を $F(\omega)$ で表し、関数 $\Gamma(\bar{\omega})$ と $G(\bar{\omega})$ をそれぞれ以下のように定義する。 $\bar{\omega}$ は後ほど紹介する資産収益に対するショックの閾値を表す。関数 $\Gamma(\bar{\omega})$ と $G(\bar{\omega})$ について、その経済学的な解釈を後ほど紹介する。

$$G(\bar{\omega}) = \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega), \quad \Gamma(\bar{\omega}) = \bar{\omega}[1 - F(\bar{\omega})] + G(\bar{\omega})$$

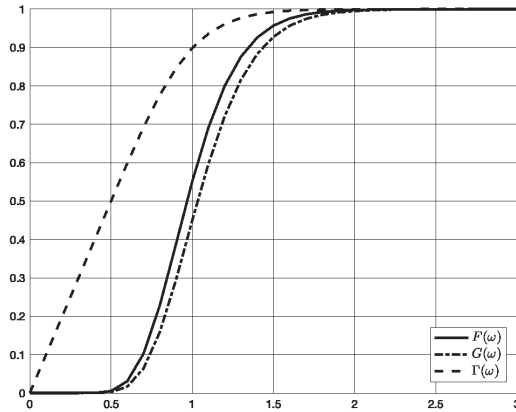
$F(\bar{\omega}) = P(\omega < \bar{\omega})$ を計算するために、変数 $z$ を $\frac{\log \omega - \mu}{\sigma} = z$ で定義して、 $\omega$ の積分範囲 $\omega \in (0, \bar{\omega})$ を $z$ の積分範囲に変換して、 $z \in (-\infty, \frac{\log \bar{\omega} - \mu}{\sigma})$ が得られる。

$$\begin{aligned} F(\bar{\omega}) &= P(\omega < \bar{\omega}) \\ &= \int_0^{\bar{\omega}} \frac{1}{\omega \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\log \omega - \mu}{\sigma} \right)^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\log \bar{\omega} - \mu}{\sigma}} \frac{1}{e^{\sigma z + \mu} \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} d e^{\sigma z + \mu} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\log \bar{\omega} - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \end{aligned}$$

$\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$ を利用して、上記の式を以下のように書き換える。

$$F(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\frac{\log \bar{\omega} + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right)$$

図 2  $F(\omega)$ ,  $G(\omega)$  と  $\Gamma(\omega)$  の画像



$\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の累積分布関数である。  $G(\bar{\omega})$  と  $\Gamma(\bar{\omega})$  を計算するために、上記と同じ手順で、変数  $z$  を  $\frac{\log \omega - \mu}{\sigma} = z$  で定義して、 $\omega$  の積分範囲  $\omega \in (0, \bar{\omega})$  を  $z$  の積分範囲  $z \in \left(-\infty, \frac{\log \bar{\omega} - \mu}{\sigma}\right)$  に変換する。

$$G(\bar{\omega}) = \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega) = \int_0^{\bar{\omega}} \omega \frac{1}{\omega \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\log \omega - \mu}{\sigma}\right)^2} d\omega = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\frac{\log \bar{\omega} - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2} dz$$

さらに、変数  $t$  を  $z - \sigma = t$  で定義して、 $z$  の積分範囲  $z \in \left(-\infty, \frac{\log \bar{\omega} - \mu}{\sigma}\right)$  を  $t$  の積分範囲  $t \in \left(-\infty, \frac{\log \bar{\omega} - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)$  に変換する。  $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$  を使って、 $t$  の積分範囲を  $t \in \left(-\infty, \frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$  で表すことができる。  $\Gamma(\bar{\omega})$  と  $G(\bar{\omega})$  をそれぞれ標準正規分布の累積分布関数で表すことができる。

$$G(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi\left(\frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$$

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right) \right] + \Phi\left(\frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$$



関数  $F(\bar{\omega})$ 、関数  $G(\bar{\omega})$  と関数  $\Gamma(\bar{\omega})$  の画像は図 2 で与えられている<sup>4</sup>。

### 2.3 最適債務契約

借り手（企業）の総資産  $A$  は純資産  $N$  と貸し手（銀行）<sup>5</sup> からの借入れ  $B$ （負債）で構成される。

$$A = N + B$$

$Z$  と  $R^K$  はそれぞれ銀行貸出のグロス金利と投資の収益率である。不確実性ショック  $\omega$  は  $\omega \times A(1 + R^K)$  の形で投資収益に影響する。 $\omega \times A(1 + R^K) \geq Z \times B$  であれば、企業の投資が成功して、企業は利息と元金をあわせて銀行に返済できる。 $\omega \times A(1 + R^K) < Z \times B$  であれば、企業の投資が失敗して、債務不履行が発生し、企業は銀行からの融資を返済できない。以上の二つの条件を合わせると、企業がちょうど銀行からの外部融資を全額で返済できる、つまり、 $\bar{\omega}(1 + R^K) \times A = Z \times B$  が成立するところで不確実性の閾値  $\bar{\omega}$  が決まる。企業のレバレッジ率を  $\frac{A}{N} = L$  で定義して、閾値  $\bar{\omega}$  とレバレッジ率  $L$  の関係を以下の式で表すことができる。

$$\bar{\omega} = \frac{ZB}{(1 + R^K)A} = \frac{Z}{1 + R^K} \frac{\frac{A-N}{N}}{\frac{A}{N}} = \frac{Z}{1 + R^K} \frac{L-1}{L}$$

$\frac{Z}{1 + R^K}$  を一定とすれば、 $\frac{d\bar{\omega}}{dL} = \frac{Z}{1 + R^K} \frac{1}{L^2} > 0$  及び図 3<sup>6</sup> から分かるように、高いレバレッジ率  $L$  は高い閾値  $\bar{\omega}$  を意味する。また、レバレッジ率  $L$  が大きくなるにつれて、閾値  $\bar{\omega}$  が 1 に近づいていく。つまり、高いレバレッジ率のもとで、外部融資のリスクが上昇するため、より高い閾値  $\bar{\omega}$  の実現で外部融資の返済が保証される。

リスクフリーの投資収益  $N(1 + R)$  で<sup>7</sup> 評価された企業の期待収益  $E[U]$  は  $\omega$  が

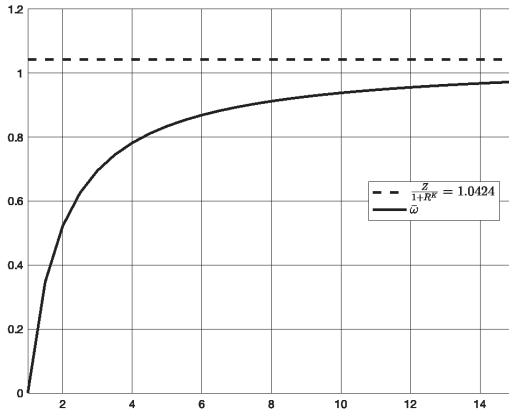
<sup>4</sup> 図 2 から分かるように、この 3 つの関数はすべて 0 より大きく、1 より小さくなっている。この性質は後ほどの分析にも役立つ。

<sup>5</sup> ここでは、一般性を失うことなく、外部融資を必要とする借り手は企業であり、企業に資金を提供する貸し手は銀行であると仮定する。

<sup>6</sup> 図 3 では、 $R = 0.0101$ 、 $R^K = 0.0175$ 、 $Z = 1.0606$ 、 $\frac{Z}{1 + R^K} = 1.0424$ 。

<sup>7</sup> 企業外部から融資を受けて投資するのではなく、保有する純資産  $N$  を国債などのリスクフリーの資産に投資すると、その収益が  $N(1 + R)$  で与えられる。

図 3 レバレッジ率  $L$  (横軸) と閾値  $\bar{\omega}$  (縦軸) の関係



$\bar{\omega}$  を越える場合のみ、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U] &= \frac{\int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \left[ \omega (1 + R^K) A - ZB \right] dF(\omega)}{N(1 + R)} \\ &= \frac{\int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \left[ \omega (1 + R^K) A - \bar{\omega} (1 + R^K) A \right] dF(\omega)}{N(1 + R)} \\ &= \frac{(1 + R^K) L}{1 + R} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega}) dF(\omega) \end{aligned}$$

変数  $t$  を  $\frac{\log \omega - \mu}{\sigma} = t$  で定義して、 $\omega = e^{t\sigma + \mu}$  が得られる。 $\omega$  の積分範囲  $\omega \in (\bar{\omega}, +\infty)$  を  $t$  の積分範囲  $t \in \left( \frac{\log \bar{\omega} - \mu}{\sigma}, +\infty \right)$  に変換する。

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega dF(\omega) - \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \bar{\omega} dF(\omega) \\ &= \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\log \omega - \mu}{\sigma} \right)^2} d\omega - \bar{\omega} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \frac{1}{\omega \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\log \omega - \mu}{\sigma} \right)^2} d\omega \\ &= \int_{\frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-\sigma)^2} dt - \bar{\omega} \int_{\frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \int_{\frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-\sigma)^2} dt - \bar{\omega} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

ここで、 $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$  の関係が使われている。さらに、変数  $z$  を  $z = t - \sigma$  で定義して、 $t$  の積分範囲  $\left(\frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}, +\infty\right)$  を  $z$  の積分範囲  $\left(\frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}, +\infty\right)$  に変換する。

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega dF(\omega) - \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \bar{\omega} dF(\omega) \\ &= \int_{\frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \bar{\omega} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \right] \\ &= \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \right] - \bar{\omega} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

これを  $\mathbb{E}[U]$  代入して、投資の期待収益  $\mathbb{E}[U]$  は以下のように表すことができる。

$$\mathbb{E}[U] = \frac{(1+R^K)L}{1+R} \left\{ \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \right] - \bar{\omega} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \right] \right\}$$

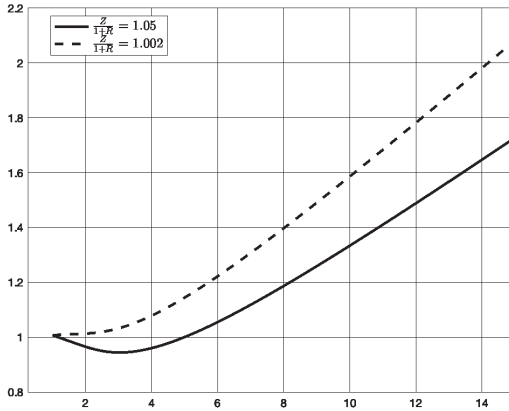
リスクフリーの金利  $R$ 、投資の収益率  $R^K$  が与えられると、図 4<sup>8</sup> から分かるように、企業のレバレッジ率  $L$  が上昇すると、期待収益  $\mathbb{E}[U]$  も上昇する。貸出金利  $Z$  とリスクフリーの金利  $R$  の金利差が高く<sup>9</sup>、企業のレバレッジ率  $L$  が小さい場合<sup>10</sup>、期待収益  $\mathbb{E}[U]$  が 1 を下回っていることがある。これは、企業が高い貸出金利（外部融資のコスト）を背負って、低いレバレッジ率を持つ借入れをして不確実性が伴う投資を行うよりも、銀行へ貯金することがもっとお得になるということを意味する。また、図 4 から読み取れるように、同じレバレッジ率  $L$  のもつで、貸出金利  $Z$  とリスクフリーの金利  $R$  との金利差が小さくなると、期待収益  $\mathbb{E}[U]$  が大きくなる。これは投資収益率  $R^K$  とリスクフリーの金利  $R$  の差が一定であれば、貸出金利  $Z$  とリスクフリーの金利  $R$  との金利差が小さくなると、閾値  $\bar{\omega}$  も小さくなり、期待収益  $\mathbb{E}[U]$  が上昇するからである。

<sup>8</sup> 図 4 では、 $R = 0.0101$ 、 $R^K = 0.0175$ 、 $\sigma = 0.2553$  として、貸出金利  $Z$  とリスクフリーの金利の金利差が高い場合 ( $Z/(1+R) = 1.05$ 、 $Z = 1.0606$ ) と低い場合 ( $Z/(1+R) = 1.002$ 、 $Z = 1.0121$ )、それぞれレバレッジ率  $L$  と企業の期待収益  $\mathbb{E}[U]$  を計算している。

<sup>9</sup> 図 4 では、 $Z/(1+R) = 1.05$ 、 $Z = 1.0606$  の場合。

<sup>10</sup> 図 4 では、おおよそ  $1.2 \leq L \leq 4.9$  の範囲。

図4 企業のレバレッジ率  $L$  (横軸) と期待収益  $E[U]$  (縦軸) の関係



次に銀行の行動を考える。  $\omega \geq \bar{\omega}$  が実現し、企業の投資が成功する場合、銀行に返済を行う。  $\omega < \bar{\omega}$  が実現し、企業の投資が失敗して破産清算に入る場合、銀行がモニタリングコストを払って、清算後の投資収益を回収する。銀行の均衡条件は

$$\int_{\bar{\omega}}^{+\infty} ZBdF(\omega) + (1 - \mu) \int_0^{\bar{\omega}} \omega (1 + R^K) AdF(\omega) = (1 + \lambda)(1 + R)B$$

で与えられる。  $\int_{\bar{\omega}}^{+\infty} ZBdF(\omega)$  は企業の投資が成功して、銀行に貸出を返済する際の銀行の期待収益を表し、  $(1 - \mu) \int_0^{\bar{\omega}} \omega (1 + R^K) AdF(\omega)$  は企業が破産して、モニタリングコストを除いて、破産清算後の投資収益を銀行が回収する際の期待収益を表す。  $\lambda$  はリスクフリーの金利  $R$  に付く預金金利のプレミアム<sup>11</sup>である。  $\mu$  は破産清算の際に銀行が払うモニタリングコストを表す。つまり、銀行は家計から預金を集めて、それを企業に融資する。企業からの返済の平均値はちょうど家計に預金の元本と金利を返済できる。銀行の均衡条件を次のように書き換えて、

<sup>11</sup> ここでは、銀行が家計から預金を集める際に適用される預金金利はリスクフリーの金利  $R$  にプレミアム  $\lambda$  を上乘せる形で定義されている。つまり、預金も完全なリスクフリー資産ではないと考えると、銀行が預金を集める際にも、リスクフリーの金利にプレミアムを上乘せる。

$$ZB(1-F(\bar{\omega})) + (1-\mu)(1+R^K)A \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega) = (1+\lambda)(1+R)B$$

さらに、 $A = N + B$ 、 $\bar{\omega} = \frac{ZB}{(1+R^K)A}$ 、 $\Gamma(\bar{\omega}) = \bar{\omega}[1-F(\bar{\omega})] + G(\bar{\omega})$  と  $G(\bar{\omega}) = \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega)$  を使って、銀行の均衡条件を以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} ZB \frac{\Gamma(\bar{\omega}) - G(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} + (1-\mu)(1+R^K)AG(\bar{\omega}) &= (1+\lambda)(1+R)B \\ \Rightarrow (1+R^K)A[\Gamma(\bar{\omega}) - G(\bar{\omega})] + (1-\mu)(1+R^K)AG(\bar{\omega}) &= (1+\lambda)(1+R)(A-N) \\ \Rightarrow (1+R^K)[\Gamma(\bar{\omega}) - G(\bar{\omega}) + G(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})] &= (1+\lambda)(1+R)\left(1 - \frac{N}{A}\right) \\ \Rightarrow (1+R^K)[\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})] &= (1+\lambda)(1+R)(1-L^{-1}) \end{aligned}$$

上記の式から、レバレッジ率  $L$  と閾値  $\bar{\omega}$  の関係を導出できる。預金金利のプレミアム  $\lambda$  が一定で与えられる場合、閾値  $\bar{\omega}$  が上昇すると、企業のレバレッジ率  $L$  が上昇する。ただし、同じレバレッジ率  $L$ のもと、企業が高い（実現しにくい）閾値  $\bar{\omega}$  を選ばないので、図5における曲線の単調逓減の区間が経済学的な意味を持たない。また、同じ閾値  $\bar{\omega}$ のもと、預金金利のプレミアム  $\lambda$  が高くなると、企業が低いレバレッジ率  $L$  を選ぶことになる。これは、預金金利  $(1+R)(1+\lambda)$  が高くなると、銀行の貸出金利  $Z$  も当然上昇するので、企業にとって、融資のコストが上昇し、融資を減らして、レバレッジ率を下げるインセンティブが働くからである<sup>12</sup>。図5<sup>13</sup>は、レバレッジ率  $L$  と閾値  $\bar{\omega}$  を示している。

$$L = \left[ 1 - \frac{(1+R^K)[\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]}{(1+R)(1+\lambda)} \right]^{-1}$$

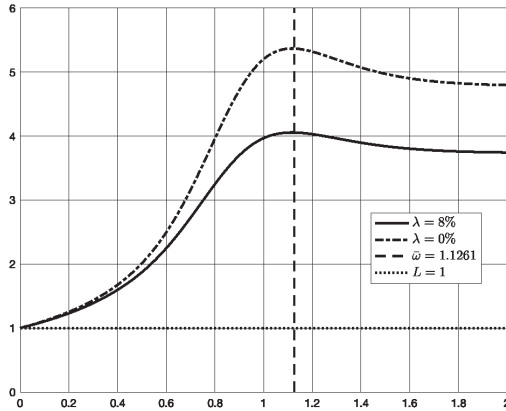
企業は投資の期待収益  $E[U]$  を最大化するように、銀行と融資契約を結ぶ。

$$E[U] = \frac{(1+R^K)L}{1+R} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega}) dF(\omega) = \frac{L(1+R^K)}{1+R} \left[ \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega dF(\omega) - \bar{\omega} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} dF(\omega) \right]$$

<sup>12</sup> この結論は部分均衡の分析で成立するが、一般均衡の分析で成立するとは限らない。これは一般均衡のもと、レバレッジ率は純資産と総資産で決定されるからである。

<sup>13</sup> 図5では、 $\mu = 0.2149$ 、 $\sigma = 0.2553$ 、 $R = 0.0101$ 、 $R^K = 0.0175$ 、 $\lambda = 0$ （低い預金金利のプレミアム）、 $\lambda = 0.08$ （高い預金金利のプレミアム）。

図5 閾値  $\bar{\omega}$  (横軸) と企業のレバレッジ率  $L$  (縦軸) の関係



$G(\bar{\omega})$ と $\Gamma(\bar{\omega})$ を利用して、 $\left[ \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega dF(\omega) - \bar{\omega} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} dF(\omega) \right]$ を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned}
 & \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega dF(\omega) - \bar{\omega} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} dF(\omega) \\
 &= \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega) + \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} \omega dF(\omega) - \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega) - \bar{\omega} \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} dF(\omega) \\
 &= \int_0^{+\infty} \omega dF(\omega) - G(\bar{\omega}) - \bar{\omega} (1 - F(\bar{\omega})) \\
 &= 1 - \left[ \bar{\omega} (1 - F(\bar{\omega})) + G(\bar{\omega}) \right] = 1 - \Gamma(\bar{\omega})
 \end{aligned}$$

レバレッジ率  $L$  を期待収益  $\mathbb{E}[U]$  に代入して、 $\mathbb{E}[U]$  を以下のように書き換える。

$$\mathbb{E}[U] = \frac{1 + R^K}{1 + R} \frac{1 - \Gamma(\bar{\omega})}{\left[ 1 - \frac{(1 + R^K)[\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]}{(1 + R)(1 + \lambda)} \right]} = \frac{(1 + R^K)(1 + \lambda)[1 - \Gamma(\bar{\omega})]}{(1 + R)(1 + \lambda) - (1 + R^K)[\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]}$$

企業の期待収益  $\mathbb{E}[U]$  と閾値  $\bar{\omega}$  の関係を解析するため、上記の式の両側に対して対数を取る。

$$\begin{aligned}
 \log \mathbb{E}[U] &= \log \left[ (1 + R^K)(1 + \lambda) \right] + \log [1 - \Gamma(\bar{\omega})] \\
 &\quad - \log \left[ (1 + R)(1 + \lambda) - (1 + R^K)[\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})] \right]
 \end{aligned}$$

前ページの式では、定数部分の  $\log[(1+R^K)(1+\lambda)]$  を所与として、閾値  $\bar{\omega}$  が上昇すると、 $\log[1-\Gamma(\bar{\omega})]$  が減少し、 $-\log[(1+R)(1+\lambda) - (1+R^K)[\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]]$  が増加し、 $\mathbb{E}[U]$  に最大値が存在することが分かる。図 6<sup>14</sup> では、閾値  $\bar{\omega}$  の上昇とともに、企業の期待収益  $\mathbb{E}[U]$  がその最大値に到達してから、減少していくので、最大値が一意に決まることが分かる。図 7<sup>15</sup> から、 $\frac{\partial \log \mathbb{E}[U]}{\partial \bar{\omega}} = 0$  となっているところは一箇所のみであることが読み取れる。

期待収益  $\log \mathbb{E}[U]$  を最大化するような閾値  $\bar{\omega}$  を  $\frac{\partial \log \mathbb{E}[U]}{\partial \bar{\omega}} = 0$  で求める<sup>16</sup>。

$$\frac{\partial \log \mathbb{E}[U]}{\partial \bar{\omega}} = 0 \Rightarrow \frac{1-F(\bar{\omega})}{1-\Gamma(\bar{\omega})} = \frac{(1+R^K) [1-F(\bar{\omega}) - \mu \bar{\omega} F'(\bar{\omega})]}{(1+R)(1+\lambda) - (1+R^K) [\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]}$$

上記の一階条件の左側  $\frac{1-F(\bar{\omega})}{1-\Gamma(\bar{\omega})}$  は必ず 0 より大きい<sup>17</sup> ため、右側  $\frac{(1+R^K) [1-F(\bar{\omega}) - \mu \bar{\omega} F'(\bar{\omega})]}{(1+R)(1+\lambda) - (1+R^K) [\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]}$  も 0 より大きい必要がある。

通常のカリブレーション<sup>18</sup> では、図 8<sup>19</sup> から分かるように、右側の分母  $(1+R)(1+\lambda) - (1+R^K) [\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]$  が常に 0 より大きいであることになっているが、図 9<sup>20</sup> から、分子  $(1+R^K) [1-F(\bar{\omega}) - \mu \bar{\omega} F'(\bar{\omega})]$  が閾値  $\bar{\omega}$  の範囲により、

<sup>14</sup> 図 6 では、 $\sigma = 0.2553$ ,  $R = 0.0101$ ,  $R^K = 0.0175$ ,  $\lambda = 0$ 。

<sup>15</sup> 図 7 では、 $\sigma = 0.2553$ ,  $R = 0.0101$ ,  $R^K = 0.0175$ ,  $\lambda = 0$ 。

<sup>16</sup> ここでは、 $\mathbb{E}[U]$  の両側に対して対数を取って、 $\frac{\partial \log \mathbb{E}[U]}{\partial \bar{\omega}} = 0$  を計算すると、一階条件の計算がやりやすくなる。 $F(\bar{\omega})$  の微分、 $G(\bar{\omega})$  の微分と  $\Gamma(\bar{\omega})$  の微分は以下のように求める。

$$F'(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$G(\bar{\omega}) = \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega) \Rightarrow G'(\bar{\omega}) = \bar{\omega} F'(\bar{\omega})$$

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \bar{\omega} [1-F(\bar{\omega})] + G(\bar{\omega}) = \bar{\omega} [1-F(\bar{\omega})] + \int_0^{\bar{\omega}} \omega dF(\omega) \Rightarrow \Gamma'(\bar{\omega}) = 1-F(\bar{\omega}) - \bar{\omega} F'(\bar{\omega}) + \bar{\omega} F'(\bar{\omega}) = 1-F(\bar{\omega})$$

<sup>17</sup> 図 2 から読み取れるように、 $F(\bar{\omega})$  と  $\Gamma(\bar{\omega})$  は 1 を超えない。

<sup>18</sup> カリブレーションについては、次節で詳しく検討する。

<sup>19</sup> 図 8 では、 $\sigma = 0.2553$ ,  $R = 0.0101$ ,  $R^K = 0.0175$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0.2149$ 。

<sup>20</sup> 図 9 では、 $\sigma = 0.2553$ ,  $R = 0.0101$ ,  $R^K = 0.0175$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0.2149$ 。

図 6 閾値  $\bar{\omega}$  (横軸) と企業の期待収益  $E[U]$  (縦軸) の関係

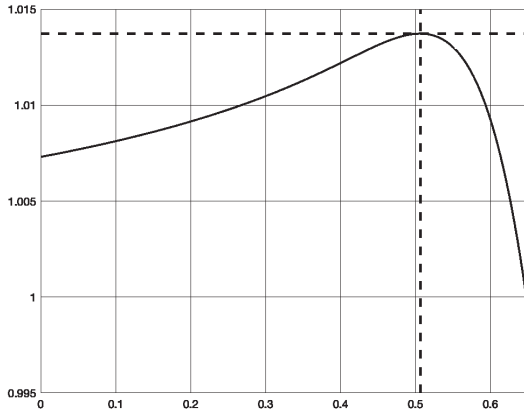
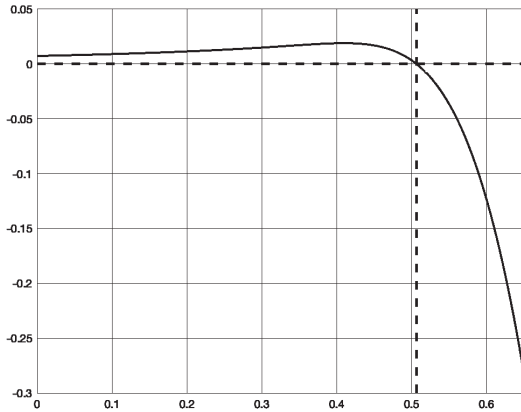


図 7 閾値  $\bar{\omega}$  (横軸) と企業の期待収益  $E[U]$  の一階微分  $\frac{\partial \log E[U]}{\partial \bar{\omega}}$  (縦軸) の関係



0 より下回ることがあるということが読み取れる。本稿の計算では、 $\bar{\omega} \in [0, 1.1171]$  の範囲内であれば、分子  $(1 + R^K)[1 - F(\bar{\omega}) - \mu \bar{\omega} F'(\bar{\omega})]$  が 0 より小さくならないことが保証されるが、 $\bar{\omega} \in (1.1171, +\infty)$  の範囲であれば、分子  $(1 + R^K)[1 - F(\bar{\omega}) - \mu \bar{\omega} F'(\bar{\omega})]$  が 0 より小さいため、企業の期待収益の最大化



図8 閾値  $\bar{\omega}$  (横軸) と分母  $(1+R)(1+\lambda) - (1+R^k) [\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]$  (縦軸) の関係

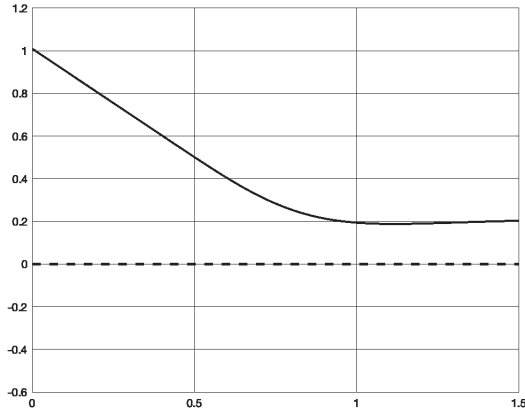
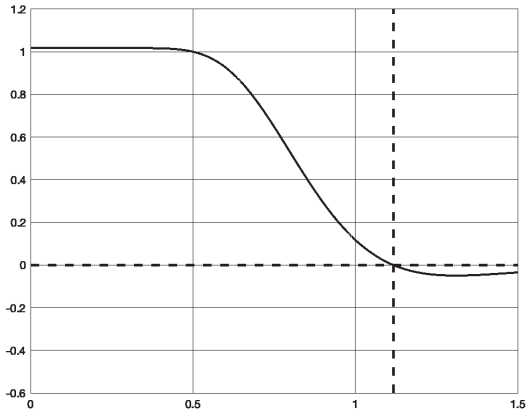


図9 閾値  $\bar{\omega}$  (横軸) と分子  $(1+R^k) [1 - F(\bar{\omega}) - \mu \bar{\omega} F'(\bar{\omega})]$  (縦軸) の関係



問題の解が存在しないことになっている。これは閾値  $\bar{\omega}$  の最適解を数値的に求める際に、非常に重要な意味を持つ結論で、通常のカリブレーションでは、 $0 < \bar{\omega} < 1.1261$  が成立する必要がある<sup>21</sup>。

<sup>21</sup> モデルの数値解については、次節で詳しく説明する。

## 2.4 モデルの均衡条件

以上の分析をまとめると、銀行と企業の間における最適債務契約を以下の7本の均衡条件で表すことができる。

- 不確実性の閾値

$$\bar{\omega} = \frac{Z}{1 + R^K} \frac{L - 1}{L} \quad (1)$$

- 銀行の均衡条件

$$L = \left[ 1 - \frac{(1 + R^K) [\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]}{(1 + R)(1 + \lambda)} \right]^{-1} \quad (2)$$

- 期待収益最大化の一階条件

$$\frac{1 - F(\bar{\omega})}{1 - \Gamma(\bar{\omega})} = \frac{(1 + R^K) [1 - F(\bar{\omega}) - \mu \bar{\omega} F'(\bar{\omega})]}{(1 + R)(1 + \lambda) - (1 + R^K) [\Gamma(\bar{\omega}) - \mu G(\bar{\omega})]} \quad (3)$$

- デフォルト確率  $F(\bar{\omega})$

$$F(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \quad (4)$$

- 関数  $G(\bar{\omega})$

$$G(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \quad (5)$$

- 関数  $\Gamma(\bar{\omega})$

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \bar{\omega} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \right] + \Phi \left( \frac{\log \bar{\omega} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \quad (6)$$

- 関数  $F'(\bar{\omega})$

$$F'(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log \bar{\omega} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (7)$$

### 3 モデルのカリブレーションと数値解

式 (1)～(7) で構成された静学的部分均衡 Financial Accelerator モデルは非線形の連立方程式システムとして数値的に解くことができる。外生変数  $\{R, R^K\}$  とパラメーター  $\{\mu, \lambda\}$  の値が与えられる場合、 $\{\bar{\omega}, \sigma\}$  の値さえ分かると、関数  $\{F(\bar{\omega}), G(\bar{\omega}), \Gamma(\bar{\omega}), F'(\bar{\omega})\}$  の値<sup>22</sup>を計算できる。(2) 式から、レバレッジ率  $L$  を解いて、さらに (1) 式から貸出金利  $Z$  を求めることができる。ここで問題となるのは、 $\bar{\omega}$  と  $\sigma$  が意味する経済現象（投資収益に影響を与える外生ショック）を直接観察することができず、カリブレーションの参考となる実証エビデンスがあまりなく、その値を外生的に与えることができないということである。この問題を解決する2つのアプローチについて紹介する。

リスクフリー金利  $R$  と投資の収益率  $R^K$  は外生変数として与えられ、ここでは、それぞれ 0.0101（年率約 4.04%）と 0.0175（年率約 7%）に設定する。モニタリングコストを表す  $\mu$  については、Christiano, Motto and Rostagno（2014）のベイズ推計の事後分布の最頻値（posterior mode）を参考して、0.2149 に設定する。預金金利のプレミアムを表す  $\lambda$  については、ベンチマークカリブレーションとして、0 に設定する。投資の収益率  $R^K$ 、モニタリングコスト  $\mu$  と預金金利のプレミアム  $\lambda$  の値を変更して、その値の変動がモデルの解にどのような影響を与えるかについて、その経済学的な解釈を後ほど説明する。

表2 外生変数とパラメーターのベンチマークカリブレーション

$R$	リスクフリー金利	0.0101
$R^K$	投資の収益率	0.0175
$\mu$	モニタリングコスト	0.2149
$\lambda$	預金金利のプレミアム	0

<sup>22</sup>  $\{F(\bar{\omega}), G(\bar{\omega}), \Gamma(\bar{\omega}), F'(\bar{\omega})\}$  は  $\bar{\omega}$  の関数であるが、実際にこれらの関数が確率分布の密度関数で与えられるので、その値は「隠れパラメーター」である  $\sigma$  と  $\bar{\omega}$  で共同で決められることになっている。

### 3.1 $F(\bar{\omega})$ に基づくカリブレーションとモデルの数値解

前述のように、 $F(\bar{\omega})$ は $\omega < \bar{\omega}$ の確率を意味し、企業のデフォルト（破産）確率として解釈することができる。企業のデフォルトが観測できる現象であることから、Christiano, Motto and Rostagno (2014) のベイズ推計では、 $F(\bar{\omega})$ の事後分布の最頻値が0.0056 (0.56%) で与えられている。Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) のオリジナル設定では、 $F(\bar{\omega})$ が0.0075 (0.75%) となっている。以上のカリブレーションと外生変数の設定に基づいて、モデルの数値的解法について解説する。

■ **Dynare による数値解** 通常、Dynare に内装されている **steady** コマンドを使って、動学マクロモデルの定常状態を求めることができる。ただし、本稿のモデルは動学的な要素を含まないため、Dynare の「**steady**」をデフォルトの設定で使って定常状態（つまり、静学的モデルの数値解）の計算ができない。そのため、便宜的な方法として、モデルにある預金金利のプレミアムを表すパラメーター  $\lambda$  を内生変数として、以下のように書き換える。

$$\lambda = \text{預金金利のプレミアム} \times R \times e^{\varepsilon_t}$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \zeta_t$$

ここでは、変数  $\varepsilon_t$  は一階自己回帰過程に従うショック過程であり、 $\zeta_t$  が外生ショックを表す。 $\rho$  は一階自己回帰過程の持続性を表し、 $\rho \in (0, 1)$  を満たす。このように、 $\lambda$  に働きかける動学的なショック過程を導入することで Dynare を回すと、モデルの内生変数 9 個<sup>23</sup>の定常状態が求められる。ベンチマークのカリブレーションでは、預金金利のプレミアムを 0 に設定して、 $\lambda = 0$  になる。Dynare では、非線形連立方程式を解くアルゴリズムがいくつか実装されている。Dynare による解を求める際に、内生変数の初期値の設定も必要があるので、本稿では、初期値を Christiano, Motto and Rostagno (2014) の推計結果を参考にして、それに近い値を初期値として設定している<sup>24</sup>。

<sup>23</sup> 内生変数： $\{\bar{\omega}, \sigma, L, Z, \Gamma(\bar{\omega}), G(\bar{\omega}), F'(\bar{\omega}), \lambda, \varepsilon_t\}$ 。 $\varepsilon_t$  以外の変数については、時間を表す添字  $t$  を省略する。

<sup>24</sup> 通常、非線形連立方程式を数値的に解く場合、初期値を方程式の解から遠く離れる値に設定すると、解が見つからない可能性がある。その際に、適宜初期値とアルゴリズムの種類を変えながら試すことで問題が解決されることが多い。

■ **「fsolve」関数による数値解** こちらの手法は Dynare を使わずに、Matlab に内装されている **fsolve** 関数を使って、(1) 式～(7) 式からなる非線形連立方程式を数値的に解くことができる。適切な初期値の設定のもと、方程式7本から未知数7個<sup>25</sup>の解が見つけれれる。

■ **グリッドサーチ法による数値解**  $F(\bar{\omega}) = 0.0056$  が与えられるもとで、1つの $\bar{\omega}$ が必ず1つの $\sigma$ に対応する。さらに、(3) 式の両辺が全部 $\bar{\omega}$ の関数となっているので、正しい $\bar{\omega}$ が見つけれられた場合、(3) 式が必ず成立し、その値を使って、レバレッジ率 $L$ を(2) 式から計算して、最後に、(1) 式を使って貸出金利 $Z$ を求める。まず、 $\bar{\omega} = [0.0001, 0.0002, \dots, 0.9999]$  のように、 $\bar{\omega}$ を0.0001の間隔で9999個生成して、 $F(\bar{\omega}; \sigma) = 0.0056$ をMatlabの「**fsolve**」関数で解いて、各 $\bar{\omega}$ に対応する $\sigma$ を求める。 $(\bar{\omega}, \sigma)$ の各ペアを使って、 $\Gamma(\bar{\omega})$ 、 $G(\bar{\omega})$ と $F'(\bar{\omega})$ を計算して、(3) 式の両辺の値をそれぞれ計算する。さらに、両側の差を求めて、連続する2つの $(\bar{\omega}, \sigma)$ のペアを使って計算した(3) 式の両側の差の積がマイナスになるところでグリッドサーチを停止し、グリッドサーチが停止する1個前のグリッドに対応する $(\bar{\omega}, \sigma)$ が(3) 式を満たす解となる。このアプローチは非線形方程式を解く二分法アルゴリズムの考え方に基づいている。

表3 計算結果

変数	Dynare による数値解	「fsolve」関数による数値解	グリッドサーチ法による数値解
$\bar{\omega}$	0.5066151	0.5066139	0.5066000
$\sigma$	0.2552544	0.2552553	0.2552651
$L$	2.0388573	2.0388522	2.0387937
$Z$	1.0116556	1.0116556	1.0116559
$\Gamma(\bar{\omega})$	0.5064000	0.5063988	0.5063850
$G(\bar{\omega})$	0.0026220	0.0026220	0.0026219
$F'(\bar{\omega})$	0.1236755	0.1236756	0.1236742

上記、3つのアプローチを使って計算した結果、四捨五入でどのアプローチも小数点4桁の精度で同じ計算結果を返してくれる。

<sup>25</sup> 未知数:  $\{\bar{\omega}, \sigma, L, Z, \Gamma(\bar{\omega}), G(\bar{\omega}), F'(\bar{\omega})\}$ 。

### 3.2 $\sigma$ に基づくカリブレーションとモデルの数値解

企業の破産確率を表す  $F(\bar{\omega})$  がカリブレーションで与えられると、 $(\bar{\omega}, \sigma)$  を連立で同時に求める必要があるため、(1)式～(7)式からなる非線形連立方程式を解くことになる。このアプローチと違って、 $\sigma$  の値を先にカリブレーションで与えると、(3)式が  $\bar{\omega}$  のみの非線形方程式になるので、複数本の非線形方程式を連立で解く必要がなくなり、Matlabの「`fsolve`」関数で簡単に  $\bar{\omega}$  の値を見つけることができる。(3)式を満たす  $\bar{\omega}$  が見つかったら、 $F(\bar{\omega})$ 、 $G(\bar{\omega})$ 、 $\Gamma(\bar{\omega})$  と  $F'(\bar{\omega})$  の値を計算して、(2)式からレバレッジ率  $L$ 、(1)式から貸出金利  $Z$  を順番に解いていくことですべての変数の解が見つかる<sup>26</sup>。

## 4 モデルの数値解析

本節では、モデルのパラメーターや外生変数の値の変化がモデルの解にどういふ影響を与えるかについて、感応度分析を行う。まず、預金金利のプレミアム  $\lambda$  については、デフォルト確率  $F(\bar{\omega})$  を固定したうえで、3.1節の方法に基づいて、モデルを数値的に解いて、預金金利のプレミアム  $\lambda$  の感応度分析を行う。次に、リスクパラメーター  $\sigma$  の感応度分析を3.2節の方法に基づいて行う。モニタリングコスト  $\mu$  と収益率  $R^K$  の感応度分析では、リスクパラメーター  $\sigma$  を固定して、同じく3.2節の方法に基づいてモデルを解く。

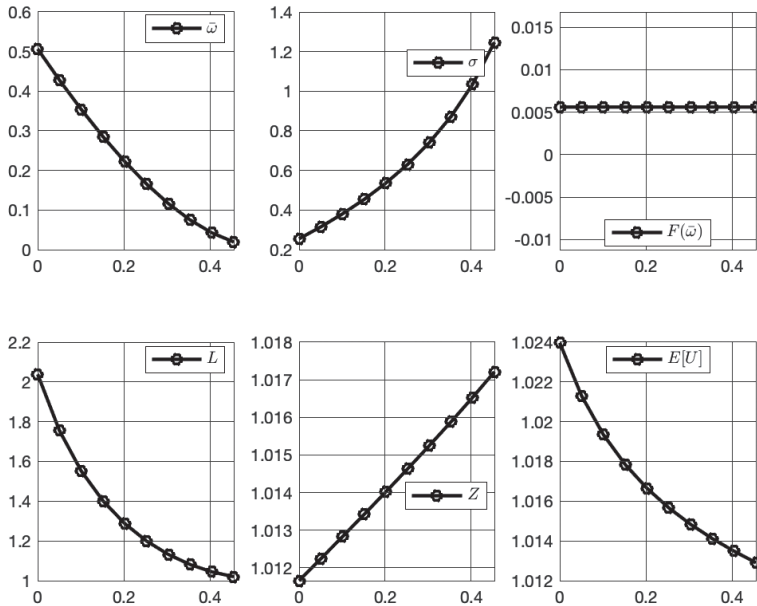
### 4.1 預金金利のプレミアム $\lambda$

表4と図10から確認できるように、貯金金利のプレミアム  $\lambda$  が上昇すると、貸出金利  $Z$  が上昇し、不確実性のばらつきを表すリスクパラメーター  $\sigma$  も上昇する。その結果、企業がより低い閾値  $\bar{\omega}$  とレバレッジ率  $L$  を選択するので、期待収益  $E[U]$  も減少する。

<sup>26</sup> 本稿では図示を作成する際に、先に  $\sigma = 0.2553$  を与えて、各変数の値の計算を行ってからグラフに直している。

表 4 預金金利のプレミアム  $\lambda$  の感応度分析

$\lambda$	$0\% \times R$	$25\% \times R$	$45\% \times R$
$\bar{\omega}$	0.5066	0.1656	0.0194
$\sigma$	0.2553	0.6305	1.2470
$F(\bar{\omega})$	0.0056	0.0056	0.0056
$Z$	1.0117	1.0146	1.0172
$L$	2.0389	1.1992	1.0198
$E[U]$	1.0240	1.0157	1.0129

図 10 預金金利のプレミアム  $\lambda$  (横軸, %) の感応度分析

## 4.2 リスクパラメーター $\sigma$

リスクパラメーター  $\sigma$  は投資収益に働きかける外生ショックの分布のばらつきを表し、図 11 と図 12 から分かるように、リスクパラメーター  $\sigma$  の値が大きくなると、分布のばらつきが増えて、ショックが小さい値で実現する確率が上昇する

ため、企業がより低い閾値 $\omega$ とレバレッジ率 $L$ を選択する。その結果、投資の期待収益 $E[U]$ が下落して、デフォルト確率 $F(\omega)$ が上昇する。銀行はより高いリスクに見合うように、貸出金利 $Z$ を引き上げる。表5は異なる $\sigma$ に対応するモデルの解の変化を示し、同じ変化が図13からも確認できる。

図11  $\omega$ の確率密度関数

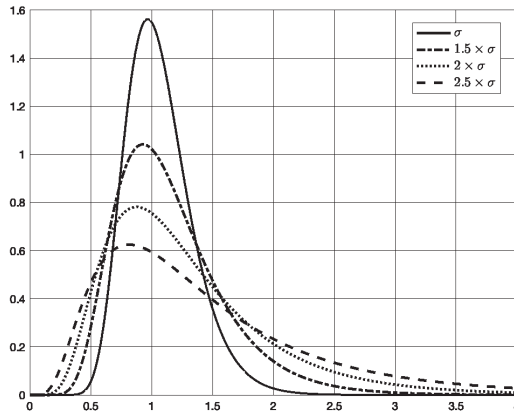


図12  $\omega$ の累積分布関数

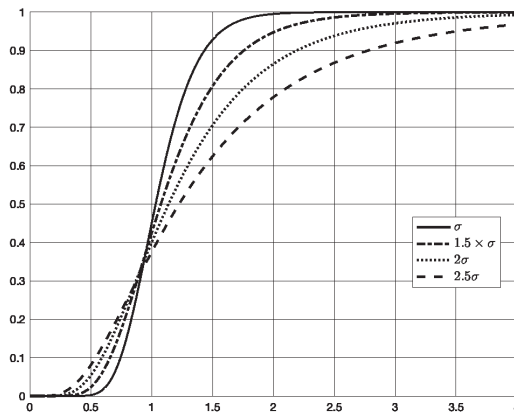
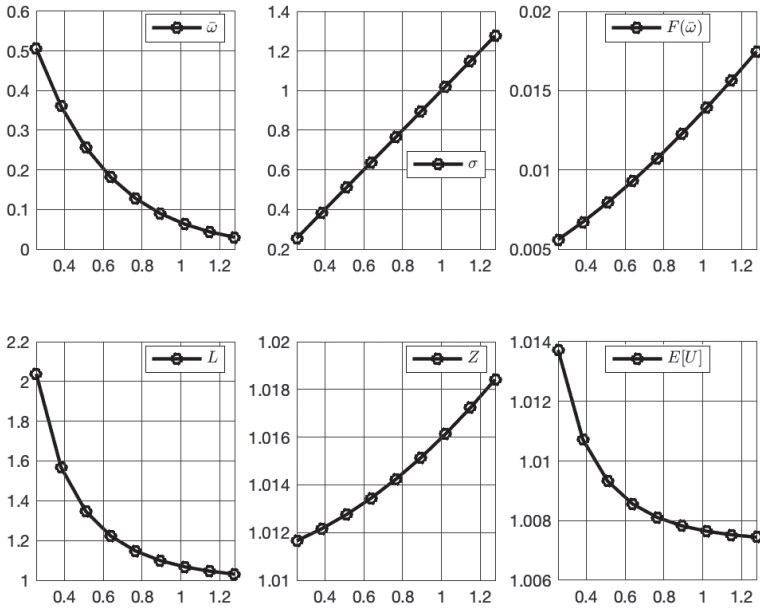




表 5 リスクパラメーター  $\sigma$  の感応度分析

$\sigma$	$1 \times 0.2553$	$3 \times 0.2553$	$5 \times 0.2553$
$\bar{\omega}$	0.5066	0.1281	0.0300
$F(\bar{\omega})$	0.0056	0.0107	0.0175
$Z$	1.0117	1.0142	1.0184
$L$	2.0386	1.1475	1.0309
$\mathbb{E}[U]$	1.0137	1.0081	1.0074

図 13 リスクパラメーター  $\sigma$  の感応度分析



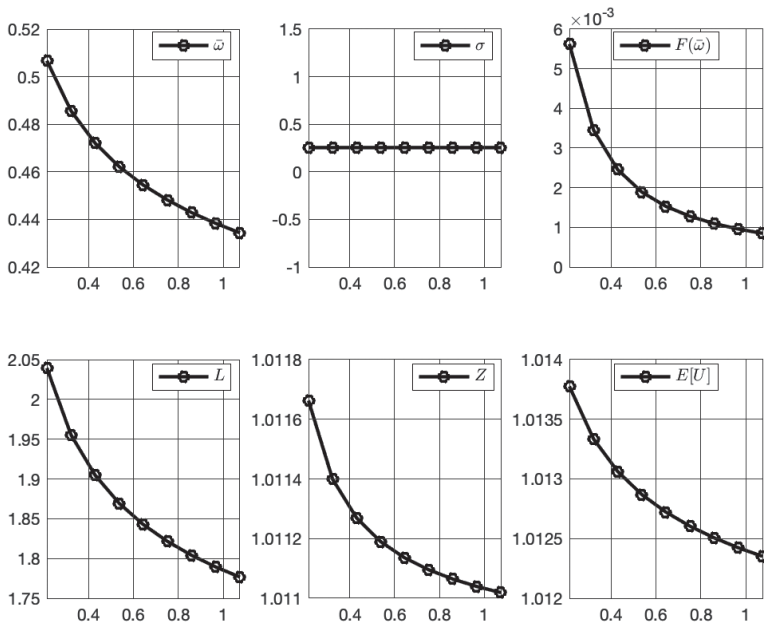
### 4.3 モニタリングコスト $\mu$

図 14 と表 6 から分かるように、モニタリングコスト  $\mu$  が上昇すると、閾値  $\bar{\omega}$  とデフォルト確率  $F(\bar{\omega})$  がともに減少する。この場合、企業がレバレッジ率  $L$  を下げて、銀行も貸出金利  $Z$  を引き下げる。その結果、企業の期待収益  $\mathbb{E}[U]$  も減少する。

表6 モニタリングコスト  $\mu$  の感応度分析

$\mu$	$1 \times 0.2149$	$3 \times 0.2149$	$5 \times 0.2149$
$\bar{\omega}$	0.5067	0.4544	0.4344
$F(\bar{\omega})$	0.0056	0.0015	0.0008
$Z$	1.0117	1.0111	1.0110
$L$	2.0394	1.8426	1.7767
$\mathbb{E}[U]$	1.0138	1.0127	1.0124

図14 モニタリングコスト  $\mu$  の感応度分析



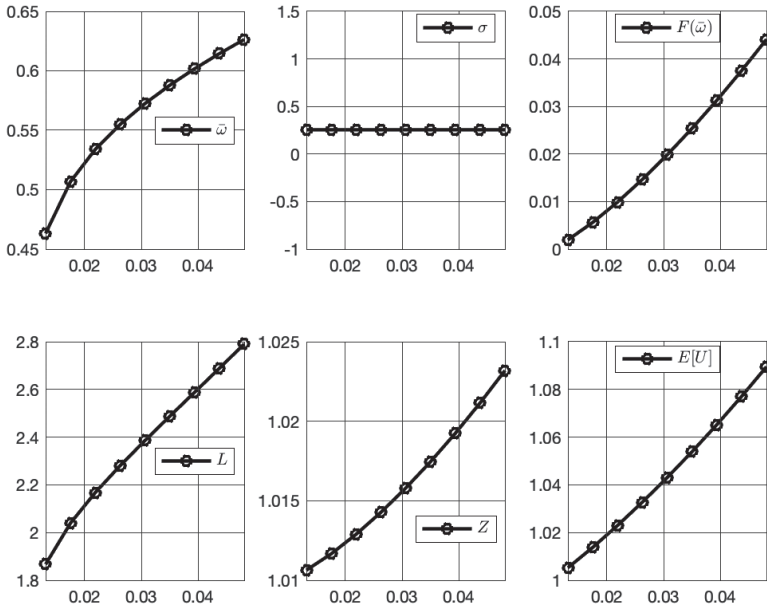
#### 4.4 収益率 $R^K$ の感応度分析

通常、リスクフリーの金利と投資の収益率は中央銀行の政策金利、国債市場や資本市場の需給状況によって決定されると考えられていることから、上記の分析では、リスクフリーの金利  $R$  と投資の収益率  $R^K$  が外生変数として固定されている。投資の収益率  $R^K$  が上昇すると、企業が高い期待収益  $\mathbb{E}[U]$  を見込んでより高

表7 収益率  $R^K$  の感応度分析

$R^K$	$1 \times 0.0175$	$2 \times 0.0175$	$2.75 \times 0.0175$
$\bar{\omega}$	0.5067	0.5878	0.6264
$F(\bar{\omega})$	0.0056	0.0254	0.0441
$Z$	1.0117	1.0174	1.0232
$L$	2.0394	2.4873	2.7904
$\mathbb{E}[U]$	1.0138	1.0539	1.0895

図15 収益率  $R^K$  の感応度分析



いレバレッジ率  $L$  を選んで進んで投資を行うと考えられる。その結果、閾値  $\bar{\omega}$  とデフォルト確率  $F(\bar{\omega})$  の上昇が見られる。この場合、企業の期待収益  $\mathbb{E}[U]$  の上昇に合わせて、銀行は貸出金利  $Z$  を引き上げる。投資の収益率  $R^K$  の上昇が引き起こす変化は表7と図15から確認できる。

## 5 まとめ

本稿は研究ノート<sup>27</sup>として、金融市場の不完全性についての文献をサーベイし、この分野の定番モデルである Financial Accelerator モデルの導出、解き方について説明し、モデルの数値解析を行う。Financial Accelerator モデルはその考え方自体がそれほど難しいものではないが、非線形の形でモデルを解くのが容易ではない。本稿では、Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) の一般均衡のフレームワークを捨てて、Financial Accelerator モデルについて、企業と銀行の間における最適債務契約という部分均衡の形でその細部まで解説する。また、第4節の数値解析では、モデルのパラメーターや外生変数の感応度分析を行い、均衡の変化を考察する。感応度分析の際に、パラメーターや外生変数がある範囲を超えると、モデルの解が存在しなくなることがある。Bernanke, Gertler and Gilchrist (1999) では、カリブレーションや定常状態の解き方についての説明が少ないため、感応度分析を通じて、モデルの解が存在するようなパラメーターや外生変数の取りうる範囲がある程度分かってきたことは本稿の貢献の1つであると考えられている。

2022年のノーベル経済学が Bernanke, Diamond と Dybvig の3名に授与されたこと<sup>28</sup>から分かるように、近年、マクロ経済学界では、金融市場と実体経済の関係がより重要視されるようになってきている。本稿の作成にも、このような背景が潜んでいる。

---

<sup>27</sup> 本稿の図表及び計算結果を再現できるプログラムは筆者への請求があれば、公開を可能とする。

<sup>28</sup> 受賞の理由として、Bernanke氏は1930年代の大恐慌における銀行危機に対する研究と2007年～2008年の金融危機におけるFRBの議長としての実務的対応で高く評価されている。その一方、DiamondとDybvigは銀行の取り付け騒ぎを描写したDiamondとDybvig(1983)がその受賞の理由となっている。3人の研究は金融市場の制度設計や金融危機の対処にとって非常に重要な意味を持っている。

## 【参考文献】

1. 李向陽 (2018) 動態隨機一般均衡 (DSGE) 模型：理論，方法和 Dynare 実践，清華大学出版社
2. 劉斌，蔣賢鋒 (2018) 系統性解剖与構建 DSGE 框架，中国金融出版社
3. Townsend, R. M. (1979). Optimal Contracts and Competitive Markets with Costly State Verification. *Journal of Economic Theory*, 21(2), pp. 265-293.
4. Townsend, R. M. (1988). Information Constrained Insurance: The Revelation Principle Extended. *Journal of Monetary Economics*, 21(2-3), pp. 411-450.
5. Bernanke, B., & Gertler, M. (1989). Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations. *The American Economic Review*, 79(1), pp. 14-31.
6. Bernanke, B. S., Gertler, M., & Gilchrist, S. (1999). The Financial Accelerator in A Quantitative Business Cycle Framework. *Handbook of Macroeconomics*, 1, pp. 1341-1393.
7. Carlstrom, C. T., & Fuerst, T. S. (1997). Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis. *The American Economic Review*, pp. 893-910.
8. Eaton, J., & Gersovitz, M. (1981). Debt with Potential Repudiation: Theoretical and Empirical Analysis. *The Review of Economic Studies*, 48(2), pp. 289-309.
9. Kiyotaki, N., & Moore, J. (1997). Credit Cycles. *Journal of Political Economy*, 105(2), pp. 211-248.
10. Iacoviello, M. (2005). House Prices, Borrowing Constraints, and Monetary Policy in the Business Cycle. *American Economic Review*, 95(3), pp. 739-764.
11. Monacelli, T. (2008). Optimal Monetary Policy with Collateralized Household Debt and Borrowing Constraints. In *Asset Prices and Monetary Policy* (pp. 103-146). University of Chicago Press.
12. Brzoza-Brzezina, M., Kolasa, M., & Makarski, K. (2013). The Anatomy of Standard DSGE Models with Financial Frictions. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(1), pp. 32-51.
13. Brunnermeier, M., Eisenbach, T., & Sannikov, Y. (2013). Macroeconomics with Financial Frictions: A Survey. In D. Acemoglu, M. Arellano, & E. Dekel (Eds.), *Advances in Economics and Econometrics: Tenth World Congress* (Econometric Society Monographs, pp.3-94). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139060028.002
14. Galí, J. (2015). *Monetary Policy, Inflation, and The Business Cycle: An Introduction to The*

New Keynesian Framework and Its Applications. Princeton University Press.

15. Kaihatsu, S., & Kurozumi, T. (2014). Sources of Business Fluctuations: Financial or Technology Shocks?. *Review of Economic Dynamics*, 17(2), pp. 224-242.
16. Gertler, M., & Kiyotaki, N. (2010). Financial Intermediation and Credit Policy in Business Cycle Analysis. In *Handbook of Monetary Economics* (Vol. 3, pp. 547-599). Elsevier.
17. Gertler, M., & Kiyotaki, N. (2015). Banking, Liquidity, and Bank Runs in An Infinite Horizon Economy. *American Economic Review*, 105(7), p. 2011-2043.
18. Gertler, M., & Karadi, P. (2011). A Model of Unconventional Monetary Policy. *Journal of monetary Economics*, 58(1), pp. 17-34.
19. Diamond, D. W., & Dybvig, P. H. (1983). Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity. *Journal of Political Economy*, 91(3), pp. 401-419.
20. Christiano, L. J., Motto, R., & Rostagno, M. (2010). Financial Factors in Economic Fluctuations. European Central Bank, Working Paper Series No.1192.
21. Christiano, L. J., Motto, R., & Rostagno, M. (2014). Risk Shocks. *American Economic Review*, 104(1), pp. 27-65.
22. Fernández-Villaverde, J. (2010). Fiscal Policy in A Model with Financial Frictions. *American Economic Review*, 100(2), pp. 35-40.
23. Cúrdia, V., & Woodford, M. (2010). Credit Spreads and Monetary Policy. *Journal of Money, Credit and Banking*, 42, pp. 3-35.
24. Galí, J., López-Salido, J. D., & Vallés, J. (2004). Rule-of-Thumb Consumers and the Design of Interest Rate Rules. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 36(4), pp. 739-763.
25. Galí, J., López-Salido, J. D., & Vallés, J. (2007). Understanding the Effects of Government Spending on Consumption. *Journal of the European Economic Association*, 5(1), pp. 227-270.