日経225オプション契約の超過需要関数の計測について

On the Estimation of Excess Demand Functions for Nikkei 225 Index options contracts

新井　啓

1　要旨

本稿では証券会社別の日経平均先物の超過需要関数のパラメータを利用して日経平均オプション契約の超過需要関数を数値計算的に求めた．日経平均先物の証券会社別のポジションは週次ベースで日本経済新聞上で知ることができる．しかし日経平均オプションの証券会社別のポジションを知ることはできない．そのため同じ原資産である日経平均先物の超過需要関数のパラメータを利用することで日経平均オプションの証券会社別超過需要関数を推定することになった．経済モデルから直接的に推定するのではなく数値計算とならざるを得なかったのは，日経平均オプションの超過需要関数を計測するためには各証券会社の予想価格分布の標準偏差を求める必要があり，これは日経平均先物の超過需要関数のパラメータになってはいるものの，他のパラメータとの積になっているために，それを分離して日経平均先物の証券会社別超過需要関数のパラメータを推定する場合には，超過需要関数が線形であるために推定すべきパラメータの数が多すぎてしまい，推定が不可能になってしまうからである．このようにして導出された証券会社別の日経平均オプションの超過需要関数によって個別証券会社の日経平均オプションのポジションを逆算できることを示した．

2　はじめに

本稿の目的は個別証券会社の日経平均先物についての超過需要関数のパラメータを利用して，個別証券会社の日経平均オプションの超過需要関数を求めることである.

2008年9月に発生したリーマンショックによって金融工学という学問はなくなってしまった．金融工学は裁定取引の存在しないことを市場の均衡条件とする理論であるが，オプションやCDSなどの金融派生商品の取引は債券や株式の現物市場には影響を与えないとの金融工学の前提を誰も信じなくなった．もちろん金融派生証券の取引規模が小さければ，そのような前提も妥当なものであろう．しかしながら金融派生証券の取引規模が非常に大きいのが現実であるから，金融派生証券の取引が債券や株式の現物市場に与えることも考えられる経済モデルで価格決定を行わなければならなくなった.

このように無裁定を均衡条件とする理論には大きな問題があるために，新井[2004]，[2007]，[2009a]，[2009b]，[2010a]，[2010b]，[2010c] の一連の研究では各経済主体の期待効用の最大化から非常に単純な形の日経平均先物契約の超過需要関数を導出し，証券会社別に測定することに成功した．この理論では需要と供給が一致することを市場の均衡条件としている．本稿ではその拡張として日経平均オプションの超過需要関数を求めることをその目的としている.

しかしながら日経平均オプションについては，だれがどれくらい取引しているのかは全くわからない．大阪証券取引所が発行している「先物・オプションレポート」では日経平均オプションの半分は外資系証券会社の取引であるということが分かる程度である．「先物・オプションレポート」では証券会社別の取引データを知ることはできない.

日経平均先物は毎週の週末のポジションが翌週火曜日の日本経済新聞に掲載される．これは日経平均オプションが1990年代の株価の下落の要因とは見なされなかったことによるものである．一方，日経平均先物は株価の下落の要因で

あるとされた時期があった．また理論的にもオプションの価格決定理論であるBlack/Scholes［1973］のモデルでは，株価はすでに株式市場で決まっており，オプション市場だけが均衡していないのでオプション市場の均衡を求めようというものであるから，オプションの取引が株式市場に影響を与えるとは想定されていなかった．オプション市場の規模が小さければ，そのような仮定をおいても問題はないであろう．しかしオプション市場をはじめとするデリバティブ市場での取引が巨大になった現在ではそのような仮定は妥当ではないことは明らかである．

Black/Scholes［1973］モデルの最大の問題点は，オプション市場から株式市場への影響はないとされているために株価がランダムウォーク仮定に従うと仮定されているところである．このように仮定されることで，ある有限期間における期末の株価は対数正規分布に従うことになる(Black/Scholes［1973］, p.640.)．しかしオプション市場から現物市場への影響は現実的にはあるために，このような仮定は妥当ではないことは明らかである．また空売りに制約は存在しないとされているが，2008年のリーマンショック以降，空売りに対する制約は数多く行われてきていることから，現実的には当てはまらない仮定である．

そのため本稿では岩田［1989］の需給均衡をオプション市場の均衡条件とする経済モデルにより，証券会社別の日経平均オプション超過需要関数の測定を行う．本稿での測定のための手続きはかなり複雑であるために，日経平均オプション超過需要関数を測定できたのはドイツ証券とソシエテジェネラル証券の2社のみである．

本稿の以下の構成は次のようになっている．第3節では岩田［1989］のオプション価格決定モデルを紹介する．このモデルによればオプションを取引する経済主体の予想原資産価格が確率微分方程式に従うことになり，これをもとに経済主体別のオプション超過需要関数が導出される．第4節では第3節で導かれたオプションの超過需要関数を数値的に求めるためのパラメータを日経平均と同じ原資産をもつ日経平均先物の超過需要関数のパラメータとして計測するための理論を述べる．このようにするのは日経平均オプションの証券会社別の

データが明らかにされていないからである．日経平均オプションの超過需要関数を求めるためには，日経平均の予想価格分布を測定する必要があり，これを計測可能な日経平均先物の超過需要関数のパラメータとして求める．第5節では新井［2004］，［2007］，［2009a］，［2009b］，［2010a］，［2010b］，［2010c］の一連の研究での計測された日経平均先物の超過需要曲線の傾きを示すパラメータをまとめて掲載している．第6節では各証券会社の絶対的危険回避度を初期保有の富の逆数で近似する．本稿で展開される理論においては絶対的危険回避度×予想価格分布の標準偏差＝日経平均先物超過需要曲線の傾きのパラメータとなっている．絶対的危険回避度と予想価格分布の標準偏差を同時に推定できないために，絶対的危険回避度の値を与えなければ予想価格分布の標準偏差を求めることができない．第7節ではドイツ証券とソシエテジェネラル証券の予想価格分布の標準偏差を計算する．第8節では第3節で導かれた日経平均オプションの超過需要関数を数値計算で求める．第7節での計算を基にドイツ証券とソシエテジェネラル証券の日経平均オプションの超過需要関数を求めた．第9節は本稿のまとめである．

3　オプションの理論モデル

本稿においては岩田［1989］のオプション価格決定の個体間分布のモデルを利用する[1]．満期時点を t^*，現在を t で表す．このオプションの原資産は配当がない株式とし，その株式の価値をX，権利行使価格をKで表す．$T\equiv t^*-t$，t：現在時点，t^*：満期時点とする．t における t^* 時点のある投資家の株価予想値を $X\equiv \ln X(t^*)$ とし，$x\equiv \ln X$ と書く．またその主観的期待値を $Y\equiv Y(t^*)\equiv E(X(t^*))$ とし，$y\equiv \ln Y$ と書く．x は正規分布 $N(m, s^2)$ に従うと仮定する．ただし $s\equiv v\sqrt{T}$ である．

投資家の株価予想値 $X(t)$ は次の確率微分方程式で記述できるとしている．

[1] 岩田では先物を原資産として理論展開されている．

$$dX = \alpha X dt + gX dZ + vX dW \tag{1}$$

ただし α は一定値，g と v は正の一定値，$Z(t)$ と $W(t)$ は相互に独立な標準ウイナー過程であり，$Z(t_0) = W(t_0) = 0$，$Z(t)$ は投資家間の予想の差異を生み出し，$W(t)$ は各投資家の主観的な予想の不確実性を生み出すものとされている．

このとき $X = e^x$ は，対数正規分布 $\Lambda(m, s^2)$ に従い，$Y = E(X) = \exp(m + (1/2)s^2)$，$Var(X) = \exp(2m + s^2)(\exp(s^2) - 1)$ となる．従って

$$\ln Y = y = m + (1/2)s^2 \tag{2}$$

である．

$g(x|y)$ を y を与えたときの x の条件付き密度関数 $N(y - s^2/2, s^2)$，$L(y)$ を y を持つ投資家の予想キャッシュ・フローの主観的期待値の現在価値とする．

y を個体間で異なるとし，y の密度関数（個体間分布と呼ぶ）を $f(y)$ とする．オプションを取引する投資家の境界条件は，

$$c = Max\{X - K, 0\} \tag{3}$$

ここで次のように定義する．

$$\begin{aligned} L(y) &= e^{-rT} E[\max(X - K, 0) \,|\, y] \\ &= e^{-rT} \int_{\ln K}^{\infty} (e^x - K)\, g(x|y)\, dx \\ &= e^{-rT} \int_{\ln K}^{\infty} (e^x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right) dx \end{aligned}$$

ところで

$$e^x \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right) = \exp\left(x - \frac{(x-m)^2}{2s^2}\right) = \exp\left(-\frac{2s^2x - (x-m)^2}{2s^2}\right)$$

exp の（　）内の分子を考えると，

$$x^2 + m^2 - 2x(m + s^2) = x^2 + (m + s^2)^2 - 2x(m + s^2) - (2s^2m + s^4)$$

であるから

$$x^2+(m+s^2)^2-2x(m+s^2)-(2s^2m+s^4)=(x-(m+s^2))^2-(2s^2m+s^4)$$

すると

$$\int_{\ln K}^{\infty}(e^x-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right)dx=$$

$$\exp\left(m+\frac{s^2}{2}\right)\int_{(\ln K-m)/s-s}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz-K\int_{(\ln K-m)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=$$

$$=e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]$$

そのため $L(y)$ を以下のように定める．

$$L(y)=e^{-rT}\{e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}$$

オプション市場でオプション料は需給を均衡させる価格として次のように定まる．

c をオプション料，q(y) を y を持つ投資家のプット・オプション契約量(正のとき買い，負のとき売り)とする．q(y) は

$$q(y)=\gamma(L(y)-c) \tag{4}$$

のように決定されると仮定する．γ は正の一定値である．オプション市場においては $q(y)$ の合計はゼロになるから，市場均衡条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty}q(y)f(y)\,dy=0 \tag{5}$$

で与えられる．(5) に (4) を代入すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(L(y)-c)f(y)\,dy=$$

$$\gamma\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-rT}\{e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}-c\right]f(y)\,dy$$

c について解くと

$$c=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\{e^{y}\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}f(y)\,dy$$

ここでyの個体間分布を正規分布$N(\ln S+rT-g^2T,\ g^2T)$と仮定する．正規分布N(a, b)に従う確率変数uの密度関数をn(u；a, b)と書く．xとyの結合密度をj(x, y)，xの周辺密度をm(x)で表そう．$m(x)=\int_{-\infty}^{\infty} j(x,y)\,dy$であり，j(x, y)$=g(x|y)f(y)$であるから，

$$m(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x|y)f(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} n(x;y-v^2T,\ v^2T/2)\,n(y;\ln S+rT-g^2T/2,\ g^2T)\,dy$$

詳しくは補論に譲るが

$$m(x)=n(x;\ln S+rT-(g^2+v^2)T/2,\ (g^2+v^2)T)$$

となるので，$\beta^2=g^2+v^2$とすると，

$$m(x)=n(x;\ln S+rT-\beta^2T/2,\ \beta^2T)$$

したがって市場均衡プレミアムは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\ln K}^{\infty}(e^x-K)g(x|y)\,dxf(y)\,dy$$

$$=\int_{\ln K}^{\infty}(e^x-K)m(x)\,dx$$

$$=S\Phi\left(\frac{\ln(S/K)+rT}{\beta\sqrt{T}}+\frac{\beta\sqrt{T}}{2}\right)-e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\ln(S/K)+rT}{\beta\sqrt{T}}-\frac{\beta\sqrt{T}}{2}\right)$$

となる．この市場均衡プレミアムが現実の市場均衡プレミアムと等しいのかを検証するためにはβの値を決めなければならない．市場均衡プレミアムと等しくなるようにβの値を決めることも可能であるが，個別証券会社のオプションの超過需要関数q(y)を計測することでβを求めることにする．

個別証券会社のオプションの超過需要関数q(y)を計測するためにはy，sの値を求めなければならない．個別証券会社のオプションのポジションを知るこ

とができるならば，このデータにより非線形推定を行うことで直接的に推定することが可能である．だがデータが存在しないためにそれを行うことができない．そのため日経平均オプションと同じ原資産の金融商品，すなわち日経平均先物のポジションを利用して，日経平均の予想価格分布を測定することにより得られたパラメータを代入することによって個別証券会社のオプションの超過需要関数を計測してみよう．そのためには新井［2007］，［2009a］，［2009b］で展開された理論が必要なために，その重要な部分だけを以下で述べることにする．

4　計測モデル

新井［2009a］で展開されたモデルに従って本稿でも計測を試みる．負の指数型効用関数を前提として来期の予想利潤（あるいは富）についての期待効用の最大化から先物（あるいは金融資産）に対する超過需要関数が導かれる．記号表記は次のとおりである．

$\tilde{p}_1$：来期（1時点）における投資家の予想先物価格，$\bar{p}_1$：来期（1時点）における投資家の予想先物価格の期待値，σ_p^2：先物価格予想値の分散，p_0：今期（0時点）における先物価格．これが今期に決定される．X_0：今期（0時点）における先物契約保有枚数とする．X_{kt}：t 期（t 時点）における第 k 取引者の先物契約保有枚数，$\bar{p}_{kt}$を t 時点における第 k 取引者の先物価格予想の期待値，p_1を t 時点の先物価格とすると t 期（t 時点）における第 k 取引者の先物契約保有枚数は，

$$X_{kt}=\alpha_k(\bar{p}_{k,t+1}-p_1)$$

となる．ある証券会社を通じて H 人の取引者が取引をしているとする．その H 人の取引者の建玉合計は，

$$\sum_{k=1}^{H}X_{kt}=\sum_{k=1}^{H}\alpha_k(\bar{p}_{k,t+1}-p_t)$$

左辺の$\sum_{k=1}^{H}X_{kt}$が日本経済新聞に掲載される証券会社別の建玉数に対応する．

この個別証券会社の超過需要関数の計測上問題なのは $\bar{p}_{kt}$ を観測することができないことであった.新井［2009a］では，ε_{kt} を t 期に発生した情報として以下のように期待形成を想定した.

$$\bar{p}_{k,t+1}=\bar{p}_{kt}+\varepsilon_{kt}$$

この期待形成によって以下のような計測モデル 1 とモデル 2 を導くことができる.

4.1　計測モデル 1

詳しくは新井［2009a］に譲るが，$\bar{p}_{k,t+1}=\bar{p}_{kt}+\varepsilon_{kt}$ の期待形成を利用すると，

$$\beta_0=\sum_{k=1}^{H}\alpha_k\mu, \qquad \beta_1=1, \qquad \beta_2=\sum_{k=1}^{H}\alpha_k$$

とした回帰式

$$\sum_{k=1}^{H}X_{kt}=\beta_0+\beta_1\sum_{k=1}^{H}X_{k,t-1}+\beta_2\Delta p_t$$

で各証券会社別の超過需要関数を計測することができる．すなわち t 時点の建玉水準を価格変動と 1 期前の建玉水準で説明する式である.

4.2　計測モデル 2

新井［2007］で示されたように，計測モデル 1 は商品先物市場における取引員の行動を分析するには適しているが，日経平均先物市場における個別の証券会社の行動を分析するためには説明力が不足する．そのため詳しくは新井［2009a］に譲るが，計測モデル 1 よりもさらに直接的な方法で

$$\beta_0=\sum_{k=1}^{H}\alpha_k\frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H}\bar{p}_{k0}, \qquad \beta_1=-\sum_{k=1}^{H}\alpha_k$$

とおいた回帰式

$$\sum_{k=1}^{H}X_t=\beta_0+\beta_1 p_t$$

を導出することができる．すなわち今期の建玉水準を今期の価格水準で説明する回帰式である．このまま OLS で推定することもできるが，回帰式のパラメ

ータの間に以下の制約が存在する．

$$\beta_0 = -\beta_1 \times \gamma, \quad \beta_1 = -\sum_{k=1}^{H} \alpha_k, \quad \gamma = \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \bar{p}_{k0}$$

そのため厳密に推定するのであれば，この場合には制約付最小2乗法により測定することになり，γの値は，その証券会社で取引する経済主体の期待値の平均値になっているため，制約付最小2乗法によれば平均的なものになるが，経済主体の期待値を推定することが可能である．

4.3　計測モデル3

ほとんどの証券会社の超過需要曲線はモデル2で計測可能である．モデル3はモデル2において系列相関の問題が深刻である場合に用いるものである．これは説明変数に大口取引者の建玉を加えるモデルである．これは先物市場における寡占的行動を分析することを目標としたモデルである．詳しくは新井［2009b］で説明されているが，重回帰で計測する場合には，

$$\beta_0 = \sum_{k=1}^{H} \alpha_k \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \bar{p}_{k0}, \quad \beta_1 = \sum_{k=1}^{H} \alpha_k \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \gamma_k, \quad \beta_2 = \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \alpha_k \tag{9}$$

とおいた回帰式

$$\sum_{k=1}^{H} X_{kt} = \beta_0 + \beta_1 X_t^{大口} + \beta_2 p_t \tag{10}$$

制約付最小2乗法の場合には

$$\beta_0 = -\beta_2 \times \xi,\ \beta_1 = -\beta_2 \times \gamma,\ \beta_2 = -\frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \alpha_k,\ \xi = \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \bar{p}_{k0},\ \gamma = \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{H} \gamma_k \tag{11}$$

制約が多くなるため，計算は難しくなるが，計測することは可能である．

5　超過需要曲線の傾きについての考察

オプション市場での行動も日経平均先物市場と同様の戦略を採用している可能性があるために，ここでこれまでに推定してきた各証券会社の超過需要曲線

の傾きのパラメータの値の推定値をまとめておこう（表1）.

日本の証券会社については継続して計測可能な証券会社が少ない．これは日経平均先物市場においては外資系の証券会社が主な取引主体であることによる．三菱UFJ証券についてはモデル3による測定結果である[2].

ドイツ証券．2007年6月と2008年6月に日経平均が上昇した時期には，ドイツ証券の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの値は理論と整合的なマイナスの値である．日経平均が安定して推移しているときには，日経平均が上昇したら売るという戦略を採用している可能性がある．

クレディ・スイス．2007年6月限については制約付最小2乗法で測定した結果ではなく，最小2乗法で測定した結果であり，クレディ・スイスの超過需要曲線の傾きを示すパラメータの値は8.812となっている．2007年3月限についての計測を行っていないが，2007年については積極的な戦略を採用していた可能性が高い．超過需要関数の計測を行ったすべての契約を全体としてみると，超過需要曲線の傾きを示すパラメータの値がプラスになっている場合が多い．

リーマン．2007年6月限については，リーマンの超過需要曲線の傾きを示すパラメータは理論と整合的なマイナスの値となっている．2007年6月限からの1年を見てみると，符号は別にすると，リーマンの超過需要曲線の傾きを示すパラメータは同じような水準にあることが特徴である．2005年12月限については日経平均が一方的に大きく上昇した時期だけパラメータの絶対値はほかの期間に比較すると大きくなっている．リーマンの超過需要曲線の傾きを示すパラメータの符号は，同じく2007年6月限からの1年を見てみると，図ったように－の次は＋になっている．

UBS：2007年6月限についてはUBSの超過需要曲線の傾きを示すパラメータの値は－6.652であり，他の限月のパラメータの値（マイナスの値のものに限る）に比較すると大きな値である．推定されたパラメータの値は理論と整合的なマイナスの値の場合が多い．パラメータの値の絶対値を見ても安定していることが特徴である．

---

[2] 新井（2009b）で示したように共変動のあるモデルによって系列相関の影響を排除することができる．

野村：2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は－5.851であり，2007年9月限とほぼ同様の水準であり，符号も理論と整合的なマイナスの値であるから，2007年6月限と9月限でほぼ同じ戦略を採用していたことが分かる．UBSのように一貫して同じ戦略を採用しているのではなく，相場の状況に応じて柔軟に戦略を変えている可能性が高い．

モルガンS：2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は－25.629であり，理論と整合的なマイナスの値ではあるが，他の限月のパラメータの推定値と比較してもかなり大きな値になっている．2008年3月限は測定不能になっているが，パラメータの推定値はマイナスの値になる場合が多い．

ソシエテ：2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は15.420でかなり大きな値になっている．2005年12月限もプラスで大きな値になっており，日経平均が上昇している時期にはそれに大きく反応する戦略を採用していたことがうかがえる．2007年12月限のパラメータの推定値はマイナスになっており，それ以前は一貫してプラスの値であったことを考えると，2007年12月限からは戦略を変化させた可能性がうかがえる．

メリル：メリル証券も相場の状況によって戦略を変えていると思われる．パラメータの符号がマイナスになったりプラスになったりしている．2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は－5.824であり理論と整合的である．2007年9月限のそれもマイナスの値で理論と整合的であるが，2007年12月限はプラスの値になり，2008年3月限もプラスであるが2008年6月限はマイナスになり，一定していない．パラメータの推定値の絶対値は他の証券会社のように10を超える場合はなく，絶対値自体は安定している．

BNPパリバ証券の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は－3.392である．メリル日本証券と同様にパラメータの符号は一定でない場合が多い．符号のプラスマイナスはちょうどメリル日本証券と同じになっている．このことからBNPパリバとメリル日本証券が同じような戦略を用いていたことがうかがえる．その絶対値自体もメリル日本証券と同様の値である．

GS：2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は13.849であるが，これはモデル2で測定すると系列相関が強いために，モデル

3で測定した結果である．GSは2000年のITバブル崩壊期のパラメータの推定値を除き，すべてプラスの値である．しかも2007年6月限と2008年6月限のパラメータの推定値は10を超えており，かなり大きな値である．2007年6月からの1年間を考えるとかなり強気な戦略を採用していたことが分かる．

ドレスナ：2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は−2.313である．2007年9月限と12月限は理論と整合的なマイナスの値である．2008年3月限のそれは約8であるが，その他の限月の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は小さい数値が多い．これはドレスナー証券の日経平均先物の建玉が小さいことによるものと考えられる．

Jモルガン．全体的にみると超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値はプラスの場合が多い．つまり積極的な戦略を採用していた期間が多いということである．2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は14.919であり，他の期間に比較するとかなり大きな値となっている．日経平均先物3月限については2000年3月限と2008年3月限しか測定を行っていないが，日本企業の決算期末が集中する3月限はマイナスであるということがJモルガンの戦略の今のところの特徴となっている．

日興シティ．2007年9月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は絶対値でみると他の期間よりかなり大きくなっている．パラメータの推定値も理論とは逆のプラスであることを考えると，日経平均の推移が堅調であると見て強気の取引を行っていた可能性がある．2007年より前の期間については2限月しか測定を行っていないが，2007年12月の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は理論と整合的なマイナスの値とはなっているものの，0に近い．そのため2007年より前の期間では超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値の符号がマイナスとなるような戦略を採用し，それ以後に強気の戦略へ転じている可能性がある．この点は他の日経平均先物契約の限月の超過需要関数を計測することによって明らかにされるであろう．

バークレイ．2007年6月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値はDW=1.000であることに注意してみていただきたい．2007年9月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値を測定することはできなかった．そ

のため空欄になっている．2000年３月限と2005年12月限も同様である．2007年12月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値を求めることはできたが不安定な値にとどまっている．全体の契約をみると，超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値はプラスの値が多い．

三菱 UFJ 証券．2007年６月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値は－7.782である．この値はモデル３によって系列相関の問題を回避した場合の値である．モデル３ではクレディ・スイスのポジションを回帰式の説明変数に加えることによって求められたものである．他の契約に比較すると2007年６月限のパラメータの推定値の絶対値は大きくなっている．

岡三証券．標本が小さいために現在までのところ，2007年６月限のみの結果しか存在していない．2007年６月限の超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値はプラスの値になっている．

カリヨン証券．最近日経平均先物を活発に取引するようになった証券会社である．測定を行った限月すべてについて，超過需要曲線の傾きを示すパラメータの推定値はプラスの値であり，安定してモデル２で超過需要関数を測定することが可能である．

6　個別証券会社の予想価格分布の分散について

ところで，岩田〔1997〕によれば富 w に関する負の指数型効用関数の絶対的危険回避度 a は対数型効用関数における初期の富 w の逆数$1/w_0$の近似値を与える．その理由は次のようである．

$$1+e(e^{-w/w_0})=1-e^{1-w/w_0}=1-e^{-(w-w_0)/w_0}$$

であるが，$y=(w-w_0)/w_0$と置くと，

$$1+e^{-y}=1-(1+(-y)+(-y)^2/2+O(y^3))=y-\frac{y^2}{2}+O(y^3)$$

$$=\ln(1+y)+O(y^3)=\ln\left(\frac{w}{w_0}\right)+O(y^3)$$

となる．

表1　モデル1のβ_2またはモデル2のβ_1

証券会社	2000.3	2005.12	2007.6	2007.9	2007.12	2008.3	2008.6
ソシエテ	0.826 (0.000) ②	10.451 (0.006) ①	15.420 (0.012) ②	4.531 (0.016) ②	−1.978 (0.103) ②	−22.516 (0.000) ②	−9.085 (0.001) ②
BNPパリバ	−1.662 (0.003) ①	3.507 (0.056) ①	−3.392 (0.004) ②	−2.174 (0.001) ②	3.730 (0.010) ②	1.358 (0.001) ①	−1.621 (0.000) ②
UBS	7.469 (0.028) ②	−1.669 (0.003) ②	−6.652 (0.041) ②	−3.023 (0.009) ②	−2.420 (0.035) ②	−2.610 (0.016) ②	−4.557 (0.000) ②
ドイツ	1.766 (0.060) ①	4.537 (0.038) ②	−12.177 (0.030) ②	7.968 (0.000) ②	1.286 (0.037) ②	13.092 (0.001) ②	−15.764 (0.000) ②
リーマン	−1.246 (0.009) ②	−8.760 (0.000) ②	−5.280 (0.050) ②	3.233 (0.033) ②	−4.378 (0.000) ②	3.943 (0.000) ②	−3.220 (0.044) ②
ドレスナ	−0.485 (0.014) ②	3.113(0.014) ②	−2.313 (0.001) ②	−1.833 (0.001) ②	−0.424 (0.009) ②	8.853 (0.011) ②	−1.359 (0.034) ②
GS	−0.921 (0.018) ①	2.829 (0.001) ②	13.849 (0.045) ②	7.028 (0.000) ②	7.543 (0.013) ②	7.973 (0.051) ①	11.659 (0.000) ②
CS	0.588 (0.001) ②	−8.942 (0.000) ②	8.812 (0.003) ②	5.281 (0.004) ②	3.909 (0.001) ②	−7.048 (0.000) ②	4.480 (0.000) ②
Jモルガン	−1.033 (0.055) ①	2.206 (0.009) ②	14.919 (0.002) ②	7.565 (0.066) ②	3.815 (0.000) ②	−2.106 (0.030) ②	2.037 (0.001) ②
メリル	−1.397 (0.039) ②	3.308 (0.007) ②	−5.824 (0.068) ②	−3.659 (0.067) ②	2.668 (0.016) ②	1.736 (0.001) ②	−3.423 (0.000) ②
モルガンS	1.292 (0.000) ②	−2.161 (0.019) ②	−25.629 (0.000) ②	−2.623 (0.026) ②	−5.080 (0.046) ②	測定不可	1.410 (0.000) ②
野村	−2.173 (0.000) ②	7.417 (0.000) ②	−5.851 (0.024) ②	−5.331 (0.001) ②	4.203 (0.011) ①	−2.826 (0.033) ②	3.591 (0.000) ②

（　）内はp値.

表２　モデル１の β_2 またはモデル２の β_1（つづき）

証券会社	2000.3	2005.12	2007.6	2007.9	2007.12	2008.3	2008.6
バークレイ			2.649 (0.050) ②		0.707 (0.375) ②	3.291 (0.000) ②	−4.552 (0.020) ②
カリヨン			3.756 (0.017) ②	1.740 (0.010) ②	2.793 (0.003) ②	5.899 (0.001) ②	2.428 (0.000) ②
三菱 UFJ 証券			−7.782 (0.000) ②	3.218 (0.001) ②	−1.594 (0.000) ②	−1.939 (0.001) ②	3.128 (0.001) ②
岡三			4.266 (0.000) ②				
日興シティ	−1.507 (0.059) ②	−5.336 (0.000) ②	1.501 (0.007) ②	16.444 (0.002) ②	−0.616 (0.060) ②	1.521 (0.000) ②	1.547 (0.000) ②
みずほ証券			−6.276 (0.000) ②			−5.355 (0.042) ②	3.989 (0.015) ②

（　）内はｐ値．空欄は測定不可能を意味する．

従って $a=1/w_0$ としたときの負の指数型効用関数 $u(w)=e^{-aW}$ の１次変換 $1+eu(w)$ は $w=w_0$ の近傍で $\ln(w/w_0)=\ln w_0$ を $O((w-w_0)/w_0)^3)$ のオーダーで近似する．一方，対数型効用関数 $u(w)=\ln w$ の絶対的危険回避度は $w=w_0$ において $1/w_0$ である．効用関数を１次変換しても絶対的危険回避度は変わらない．それ故，負の指数型効用関数の絶対的危険回避度ａは $w=w_0$ における対数型効用関数の絶対的危険回避度 $1/w_0$ の近似値とみることができる．

7　個別証券会社の予想価格分布の標準偏差の計測

7.1　ドイツ証券

ドイツ証券の場合には日経平均先物の超過需要曲線が右上がりになる場合が多い．理論と整合的に右下がりになっているとは2008年６月限と2007年６月限

である．比較的最近の結果として2008年６月限のパラメータの推定値を利用して計算を行ってみよう．

ドイツ証券で取引する取引者の数をＮで表すことにすると，$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k=\sum_{k=1}^{N}1/a_k\sigma_k^2$であった．$N=1$であるならば，$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k=1/\alpha_k\sigma_k^2=15.764$である．$1/a_k=$10万円であれば，10万円$=1/\sigma_k^2=15.764$という式が成り立つ．したがって$\sigma_k^2=$10万円$/15.764=6343.568$となる．それゆえ$\sigma=79.6465167$となり，予想価格分布の標準偏差は約80円と計算できる．もしこれが真実であるならば，かなり確真的な予想を行っていたことになる．

ドイツ証券でN=2の場合を考えよう．N=2であるならば，$\sum_{k=1}^{2}\alpha_k=\sum_{k=1}^{2}1/(a_k\sigma_k^2)=15.764$である．$\sum_{k=1}^{2}1/(a_k\sigma_k^2)$であるが，$1/(a_1\sigma_1^2)+1/(a_2\sigma_2^2)=15.764$となる．$a_1$と$a_2$が異なり，さらに$\sigma_1^2$と$\sigma_2^2$が異なると計算は可能であるが，複雑なものとなってしまう．そこで$a_1=a_2=a$と仮定し，さらに$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$として，計算を簡単にすることで，予想価格分布の標準偏差を計算してみよう．$\sum_{k=1}^{2}\alpha_k=\sum_{k=1}^{2}1/(\alpha_k\sigma_k^2)=1/(a_1\sigma_1^2)+1/(a_2\sigma_2^2)=2\times1/(a\sigma^2)=15.764$．$1/a=$10万円とする．すると$2\times$10万円$\times1/\sigma^2=15.764$．$\sigma^2=$20万円$/15.764=12687.13524$．$\sigma=112.6371841$．N=1の場合と比較すると$112.6371841-79.6465167=32.99066741$円増加している．N=1で，1/a=20万円の場合は，予想価格分布の標準偏差σの値はこの場合と同じになる．

ドイツ証券でN=3の場合を考えよう．N=3であるならば，$\sum_{k=1}^{3}\alpha_k=\sum_{k=1}^{3}1/(a_k\sigma_k^2)=15.764$である．$\sum_{k=1}^{3}1/(a_k\sigma_k^2)$であるが，３取引主体はすべて異なるパラメータの値を持つとするのであれば，$1/(a_1\sigma_1^2)+1/(a_2\sigma_2^2)+1/(a_3\sigma_3^2)=15.764$となる．計算が複雑になることを防ぐために，$a_1=a_2=a_3=a$と仮定し，さらに$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\sigma^2$として計算を行ってみよう．すると$\sum_{k=1}^{3}\alpha_k=\sum_{k=1}^{3}1/(a_k\sigma_k^2)=1/(a_1\sigma_1^2)+1/(a_2\sigma_2^2)+1/(a_3\sigma_3^2)=3/(a\sigma^2)=15.764$．すると$\sigma^2=19030.70287$，$\sigma=137.9518136$．N=2の場合と比較すると$137.9518136-112.6371841=25.31462946$円増加している．N=2の場合と比較すると，標準偏差自体の大きさは増えているものの，その増加額は鈍っている．

ドイツ証券でN=4の場合を考えよう．N=4であるならば，$\sum_{k=1}^{4}\alpha_k=\sum_{k=1}^{4}1/a_k\sigma_k^2=15.764$である．N=3の場合と同様の仮定をおいて計算すると，

σ^2＝25374.27049．σ＝159.2930334円である．N＝3の場合と比較すると21.34121983円増加しているが，増加額は鈍っている．

ドイツ証券でN＝5の場合を考えよう．同様の計算を行うと，σ^2＝31717.83811，σ＝178.0950255円である．N＝4の場合と比較すると18.80199211円増加しているが，やはり増加額は鈍っている．

だいたいの傾向が分かってきたのでドイツ証券でN＝10の場合を考えよう．同様の計算を行うと，σ^2＝63435.67622，σ＝251.8644005円である．N＝5の場合と比較を行うと，251.8644005－178.0950255＝73.76937496円の増加である．N＝9の場合と比較すると251.8644005－238.9395501＝12.92485037となり，N＝5の場合と比較すると増加額は6円減っている．これはN＝1で1/a＝100万円の場合に相当する．

ドイツ証券でN＝20の場合を考えよう．これまでと同様の手続きにより以下のような値を求めることができた．すなわち予想価格分布の標準偏差について σ^2＝126871.3524，σ＝356.190051．標準偏差の値について，N＝19の場合と比較すると，356.190051－347.1711175＝9.018933524円標準偏差は増加している．N＝10の場合に比較すると356.190051－251.8644005＝104.3256506円標準偏差は増加していることになる．したがって取引者数の10人の増大に対して，約100円標準偏差が増大している．これはN＝1で1/a＝200万円の場合，あるいはN＝2で1/a＝100万円，N＝4で1/a＝50万円に相当する．

ドイツ証券でN＝30の場合を考えよう．これまでと同様の計算手続きにより計算を行うと次のような値を求めることができる．σ^2＝190307.0287，σ＝436.2419382円と計算される．N＝20の場合と比較すると，436.2419382－356.190051＝80.05188721円の増加である．N＝20の場合に比較すると標準偏差の増加額は約20円減少している．

ここでドイツ証券を通じて取引をする取引者数をぐっと増やして計算を行ってみよう．ドイツ証券でN＝100の場合を考えよう．これまでと同じ計算により標準偏差を求めてみると次のようになる．σ^2＝634356.7622，σ＝796.465167円となる．標準偏差をN＝99の場合と比較すると，796.465167－792.4728353＝3.992331742円となり，4円を切る差になってきている．N＝50

で 1/a＝20万円，N＝20で 1/a＝50万円，N＝10で 1/a＝100万円の場合に相当する．

ドイツ証券でN＝200の場合を考えてみよう．σ^2＝1268713.524，σ＝1126.371841円である．N＝199の場合は σ＝1123.552383であるから，N＝200の σ と比較をするのであれば，1126.371841－1123.552383＝2.819458342円となり，ドイツ証券の予想価格分布の標準偏差の増加額は3円を切るようになってきている．しかしまだ収束したとは言えない．このケースはN＝50で 1/a＝40万円，N＝20で 1/a＝100万円，N＝10で 1/a＝200万円の場合に相当する．

ドイツ証券でN＝300の場合を考えてみよう．予想価格分布の標準偏差を求めてみると σ^2＝1903070.287，σ＝1379.518136円である．N＝299の場合と比較してみよう．すると1379.518136－1377.21702＝2.30111609円である．N＝100のときにN＝99のときの標準偏差と比較したが2.819458342円であったから，標準偏差の増加幅は確かに減少しているものの，さほど減少していないことが分かる．なおここでのN＝300の場合の結果であるが，N＝50で 1/a＝60万円，N＝20で 1/a＝150万円，N＝10のときに1/a＝300万円の場合に相当する．

そこで取引者数Nをさらに大きくして，ドイツ証券でN＝1000の場合を考えてみよう．1/a＝10万円である．予想価格分布の標準偏差を求めると，σ^2＝6343567.622であるから σ＝2518.644005円である．N＝300の場合と比較すると2518.644005－1379.518136＝1139.125869円増加している．N＝999の場合と比較すると，2518.644005－2517.384368＝1.25963699円であり，予想価格分布の標準偏差の増加幅は2円を下回り1円に近くなっている．ここで計算した予想価格分布の標準偏差はN＝100で 1/a＝100万円，N＝50で 1/a＝200万円，N＝20で 1/a＝500万円，N＝10のときに 1/a＝1000万円の場合に相当する．

今度はN＝2000の場合を考えてみよう．1/a＝10万円である．予想価格分布の標準偏差を求めると，σ^2＝12687135.24であるから σ＝3561.90051円である．N＝1999の場合と予想価格分布の標準偏差の差を計算すると，3561.90051－3561.009924＝0.890586465円で，標準偏差の増加額は1円を下回るようになってきている．なおこのケースはN＝200で 1/a＝100万円，N＝20で 1/a＝1000

万円，N＝10で1/a＝2000万円に相当する．

1/a＝10万円のときに，N＝3000の場合を考えてみよう．σ^2＝19030702.87であるから，σ＝4362.419382円である．N＝2999の場合と比較をしてみると，4362.419382－4361.692252＝0.727130496円であり，１円を下回るようになったがまだ約0.7円の増加しており，一定の値に収束したとは言えない．このケースはN＝300で1/a＝100万円，N＝30で1/a＝1000万円，N＝15で1/a＝2000万円，N＝10で1/a＝3000万円に相当する．

1/a＝10万円のときに，N＝4000の場合を考えてみよう．σ^2＝25374270.49，σ＝5037.288009円と計算される．このようにして計算された予想価格分布の標準偏差をN＝3999の場合と比較を行うと，5037.288009－5036.658309＝0.62970036円である．N＝3000の場合に予想価格分布の標準偏差の変化幅は約0.7であったから，Nをさらに1000追加したとしても約0.1しか変化幅は縮小しなかったことになる．このケースはN＝400で1/a＝100万円，N＝40で1/a＝1000万円，N＝20で1/a＝2000万円，N＝10で1/a＝4000万円に相当する．

1/a＝10万円のときに，N＝5000の場合を考えてみよう．これまでと同様に計算するとσ^2＝31717838.11，σ＝5631.859206円である．一定の値に収束しているのかを調べるためにN＝4999の場合と比較を行う．計算を行ってみると5631.859206－5631.295992＝0.563214083円となる．N＝5000程度まで増やしたとしても，予想価格分布の標準偏差は約0.5円ずつ増加している．このケースはN＝500で1/a＝100万円，N＝50で1/a＝1000万円，N＝25で1/a＝2000万円，N＝10で1/a＝5000万円に相当する．

1/a＝10万円のときに，N＝6000の場合を考えてみよう．予想価格分布の標準偏差はσ^2＝38061405.73，σ＝6169.392655円である．N＝5999の場合と比較を行うと，6169.392655－6168.878518＝0.514137478円である．N＝5000の場合にN＝4999と比較すると0.56円増加していたが，1000増やしても0.05しか増加額は増加しなくなった．このケースはN＝600で1/a＝100万円，N＝60で1/a＝1000万円，N＝30で1/a＝2000万円，N＝10で1/a＝6000万円に相当する．

1/a＝10万円のときに，N＝10,000の場合を考えてみよう．予想価格分布の標準偏差を計算するとσ^2＝63442019.79，σ＝7965.049893円である．N＝9999

の場合と比較すると，7965.049893−7964.65167＝0.398222628円となる．このケースはN＝1000で1/a＝100万円，N＝100で1/a＝1000万円，N＝50で1/a＝2000万円，N＝10で1/a＝10,000万円に相当する．

1/a＝10万円としてN＝10,000にまで増加させたが収束したとは言い難い．予想価格分布の標準偏差はσ＝7965.049893円にまで増加している．もし予想価格分布として正規分布が想定されるのであれば，平均値＝期待値として，平均値から±2σまで考えると，ドイツ証券の場合にはマイナス方向は0以下の部分がかなり大きくなってしまい，σ＝7965.049893円という値自体を信頼することはできなくなっている．

1/a＝10万円のときに，N＝5000の場合を考えてみよう．σ＝5631.859206円であったから，平均値＝期待値として，平均値から±2σまで考え，マイナス方向で平均から2σを考えると，この場合に平均マイナス2σが0になるので，1つの候補であるとはいえる．

マイナス方向で平均から3σがちょうど0になるような場合を考えてみよう．N＝2000の場合，1/a＝10万円であるとすると，σ＝3561.90051円である．この予想価格の標準偏差の水準であるならばマイナス方向で平均から3σがちょうど0になる．N＝1999の場合と予想価格分布の標準偏差の差を計算すると，0.890586465円で，標準偏差の増加額は1円を下回るようになってきている．この数値が1円を下回っているかどうかを収束したかどうかの1つの基準としてもよいであろう．

日本経済新聞社『株式投資の手引　1997』によれば証拠金として最低600万を預託しなければならない．1/aは初期保有資産であったが，初期保有資産が10万円というのはあまりにも低すぎる．岩田［1997］(p.79)のように損失許容額と考えた方がよいであろう．1/a＝10万円，N＝2000の場合はN＝200で1/a＝100万円，N＝20で1/a＝1000万円，N＝10で1/a＝2000万円に相当する．100万円程度が損失許容額であるとすると取引者数が200人となるので，推測ということになってしまうが，この程度が妥当ではないかと思われる．

7.2 ソシエテ

ソシエテジェネラル証券の場合も日経平均先物2008年6月限の超過需要関数の測定結果を利用することにしよう．したがって$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k=\sum_{k=1}^{N}1/(a_k\sigma_k^2)=9.085$である．N＝1であるならば，$\alpha_k=1/(a_k\sigma_k^2)=9.085$である．1/a＝10万円としてドイツ証券と同様の計算を行ってみよう．するとソシエテジェネラル証券の予想価格分布の標準偏差は次のようになる．$\sigma^2=11007.15465$，$\sigma=104.9149877$円である．ドイツ証券のN＝1の場合と比較してみる．

ドイツ証券のそれは$\sigma=79.6465167$であったから，ソシエテジェネラル証券の方が25.26847103円大きいことになる．

ソシエテジェネラル証券でN＝2の場合を考えてみよう．予想価格分布の標準偏差を求めてみると$\sigma^2=22014.3093$，$\sigma=148.3721985$円である．N＝1の場合と比較すると148.3721985－104.9149877＝43.45721081円となる．ソシエテジェネラルで取引をする取引者が1人増加するだけで予想価格分布の標準偏差の値は大きく変化することになる．なお，これはN=1で1/a＝20万円の場合に相当する．

ソシエテジェネラル証券でN＝3の場合を考えてみよう．すると予想価格分布の分散と標準偏差は$\sigma^2=33021.46395$，$\sigma=181.7180892$円と計算できる．ここでN＝2の場合と比較をしてみよう．すると181.7180892－148.3721985＝33.34589068円の増加額となっている．N＝2のときにN＝1のときと比較を行っているが，N＝2のときにと比べると約10円増加幅は減っていることになる．

ソシエテジェネラル証券で1/a＝10万円のときにN＝4の場合を考えてみよう．$\sigma^2=44028.6186$，$\sigma=209.8299755$円であり，N＝3の場合と比較すると，209.8299755－181.7180892＝28.11188624円となる．N＝3の場合よりも約5円増加幅は減っていることになる．

標準偏差の増加幅は減っているが，ドイツ証券の場合で明らかになったように取引する主体の数Nを1000以上にしなければ収束しない．そこでN=1000としてソシエテジェネラル証券の予想価格分布の標準偏差を計算してみよう．同様の計算を行うと$\sigma^2=11007154.65$，$\sigma=3317.703219$円である．ソシエテジ

ェネラル証券の予想価格分布の標準偏差をN＝999の場合と比較すると3317.703219－3316.043953＝1.65926653円の増加であり，増加額は2円を下回っている．なお，このケースはドイツ証券と同様にN＝100で1/a＝100万円，N＝50で1/a＝200万円，N＝20で1/a＝500万円，N＝10のときに1/a＝1000万円の場合に相当する．

さらにNを増加させてN＝2000としてみよう．するとσ^2＝22014309.3，σ＝4691.940888円と計算される．N＝1999のときの予想価格分布の標準偏差の数値との比較を行ってみる．すると4691.940888－4690.767757＝1.173131882円と計算される．N＝1000の場合にさらに1000を追加してみたが，N＝1999の場合に比較して1円増加している．N＝1000の場合とN＝999の場合の差に比較すると予想価格分布の標準偏差の増加額は約0.5円減少している．なおこのケースはN＝200で1/a＝100万円，N＝20で1/a＝1000万円，N＝10で1/a＝2000万円に相当する．

Nを増加させてN＝3000としてみよう．σ^2＝33021463.95となるので，σ＝5746.43054円である．N＝2999の場合と比較をしてみると，5745.472722－5746.43054＝0.957818248円である．なおこのケースはN＝300で1/a＝100万円，N＝30で1/a＝1000万円，N＝15で1/a＝2000万円に相当する．

さらにNを増加させてN＝4000としてみよう．σ^2＝44028618.6となるので，σ＝6635.406438である．N＝3999の場合と比較をしてみると，6635.406438－6634.576961＝0.82947765円である．このケースはN＝400で1/a＝100万円，N＝40で1/a＝1000万円，N＝20で1/a＝2000万円,N＝10で1/a＝4000万円に相当する．予想価格分布の標準偏差の増加額自体は1円を切るようになってきた．

さらにNを増加させてN＝10000としてみよう．σ^2＝110071546.5，σ＝10491.49877円である．N＝9999の場合と比較をしてみると，10491.49877－10490.97419＝0.524588054円である．N＝4000の場合と比較すると予想価格の標準偏差の増加額は約0.8から0.5へと減少しているものの収束はしていない．このケースはN＝1000で1/a＝100万円，N＝100で1/a＝1000万円，N＝50で1/a＝2000万円，N＝10で1/a＝10,000万円に相当する．

またソシエテジェネラル証券の予想価格分布の期待値は15102.4円と推定されている．もし予想価格分布の標準偏差が１万円であると，予想価格分布として標準正規分布を想定した場合には，平均の下 2σ の値はマイナスの値になってしまう．そのためN＝10000として計算したケースを利用することは現実的ではないと考えられる．

そこで平均の下 3σ の値が０近辺になるように考えてみる．それは，N＝2000のケースである．この時の予想価格分布の標準偏差は σ＝4691.940888円である．N＝2000のケースはN＝200で1/a＝100万円，N＝20で1/a＝1000万円，N＝10で1/a＝2000万円に相当していた．ドイツ証券の場合もN＝2000のケースが妥当であると考えたが，ソシエテジェネラル証券の場合も，先物の損失が100万円程度までは許容できる人が200人いるというケースが妥当なようである．

8　日経平均オプション超過需要関数を求める

これまでで日経平均オプション超過需要関数を求めるために必要なパラメータの値はすべて揃った．最初に $L(y)=e^{-rT}\{e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}$ を求める必要がある．

ドイツ証券の日経平均オプションの超過需要関数を求めてみよう．日経平均先物2008年６月限のドイツ証券の期待値は制約付最小２乗法により11293.2円(p値＝0.000)と推定されている．超過需要関数を求めるために以下の数値を求める．$e^y=11293.2$と計算される．権利行使価格K＝12500円とする．sをもとめる必要があるが，これについては $Y=E(X)=\exp(m+(1/2)s^2)$ を利用する．mとsは取引参加者全体の期待値の分布のパラメータである．mの値として $\ln 11000=9.305650552$ としてみよう．したがって $11293.2=\exp(\ln 11000+(1/2)s^2)$ を満たすsを求める．これをマクロソフトのエクセルのゴールシーク関数を使って求めると，s＝0.229370887となる．$\ln K=\ln 12500=9.433483923$ であるから，$(y-\ln K)/s+s/2=-0.327950809$，$\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]=0.371474428$ と計算できる．したがって $e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]=$

11293.2×0.371474428＝4195.135013となる．$(y-\ln K)/s-s/2=-0.327950809$，$\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]=0.288653828$．$K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]=12500\times0.288653828=3608.172845$．$e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]=586.9621678$．ここで r＝0.01，T＝1/12とすると，$L(y)=e^{-rT}\{e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}=586.4732364$円．この値がドイツ証券のコール・オプションの主観的価値の割引現在価値になる．2008年６月限の先物契約が発会した当初のオプションの価格を日本経済新聞（2008年３月15日）をみてみると権利行使価格12500円のコール・オプションの価格は４月限390円，５月限530円，６月限670円であった．権利行使価格12500円のコール・オプションの売買高は４月限4343枚，５月限713枚，６月限は掲載されていないが5月限の売買枚数から非常に商いは薄いと推測できる．

本稿におけるコール・オプションの超過需要関数は q(y)＝γ(L(y)－c) であった．岩田［1989］（p.208）の投資家集団の平均的資産需要関数よりは本稿における$1/(a\sigma^2)$に相当する．ドイツ証券の日経平均先物契約の超過需要関数のパラメータの推定値から $\gamma=1/(a\sigma^2)=15.467$である．

この γ の値を利用して，最初に一番簡単なケースでコール・オプションの超過需要関数を数値計算的に求めてみよう．すなわち N＝1，ドイツ証券を通じて取引する経済主体が１人の場合である．すると q(y)＝γ(L(y)－c)＝15.467(L(y)－c)＝15.467(586.4732364－390)＝3038.851547になる．したがって小数点以下を無視すると，ドイツ証券は3038枚のコール・オプション（権利行使価格は12500円）の買い持ちのポジションを保有していたと推定される．

次に N＝２の場合を考えてみよう．推定されるオプションの超過需要関数は$\sum_{i=1}^{N} q_i(y)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(L_i(y)-\mathrm{c})$．ここで$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(L_i(y)-\mathrm{c})=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i L_i(y)-\sum_{i=1}^{N}\gamma_i c$ であるが，$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i c$ については特に問題はない．問題があるのは$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i L_i(y)$ である．15.764は $\sum_{i=1}^{N}\gamma_i$であるために，$L_i(y)$ がドイツ証券で取引する各経済主体で異なっているとすると，このままでは計算することができない．$L_i(y)$ がドイツ証券で取引する経済主体ですべて同一であるとの単純化の仮定を行うと$\sum_{i=1}^{N}\gamma_i L_i(y)=\gamma_i L(y)+\cdots+\gamma_N L(y)=L(y)(\gamma_1+$

$\cdots+\gamma_N)=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i L(y)$ となるため15.764×L(y) という計算ができるためにN＝1の場合と同じ計算をすればよいことになる．したがってN＝1の場合の結果を取引者が何人いる場合にもあてはめてよいことになる．

本稿においてはドイツ証券については日経平均先物2008年6月限の超過需要関数のパラメータの推定値を用いているために本来は日経平均オプション6月限のデータを必要とするが，3月の時点においては日経平均オプション6月限の取引は詳細に日本経済新聞には掲載されない．日経平均オプション4月限の権利行使価格12500円のコール・オプションの総建玉は6923枚であった．本稿の推定値はドイツ証券は3038枚のコール・オプションの建玉を保有しているというものであるが，もしこの推定値が正しいとするならば総建玉のうちの半分近くをドイツ証券が保有していることになる．

権利行使価格K＝13000円の場合のオプションの超過需要関数を求めてみよう．日経平均オプションの超過需要関数を導出するために必要なパラメータの値を順に求めていってみよう．$e^y=11293.2$．権利行使価格K＝13000．sをもとめる必要があるが，これについては権利行使価格K＝12500円の場合にマイクロソフトのエクセルのゴールシーク関数を使って求めたs＝0.229370887をそのまま用いることができる．ln K＝ln 13000＝9.472704636であるから，$(y-\ln K)/s+s/2=-0.49894336$，$(y-\ln K)/s-s/2=-0.728314247$と計算できる．$\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]=0.308909643$，$e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]=3488.578383$．$(y-\ln K)/s-s/2=-0.728314247$，$\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]=0.233210622$．$K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]=13000\times0.233210622=3031.73808$．$\{e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}=456.8403024$．ここでr＝0.01，T＝1/12とすると，$L(y)=e^{-rT}\{e^y\Phi[(y-\ln K)/s+s/2]-K\Phi[(y-\ln K)/s-s/2]\}=456.4597607$円．

N＝1で考えれば後の結果は同じであるから，ドイツ証券を通じて取引する経済主体が1人の場合であるとすると，q(y)＝γ(L(y)－c)＝15.467(L(y)－c)＝15.467(456.4597607－190)＝4121.333119になる．小数点以下を無視すると4121枚のポジションを保有していたことになる．2008/3/14時点における権

利行使価格13000円の日経平均オプション4月限の取組高は19180枚であった．そのためドイツ証券の先物のポジションが大きいのでオプションでも大きなポジションを保有しているとすれば現実的な数値になる．しかしドイツ証券は権利行使価格12500円で取引をするのか13000円で取引をするのかを決定することが現在のモデルでは不可能である．

9　まとめ

本稿では証券会社別の日経平均オプションの超過需要関数を日経平均先物契約の超過需要関数のパラメータを用いて数値計算で求めてみた．日経平均先物も日経平均オプションも同じ日経平均株価指数を原資産としたものであるため日経平均先物の超過需要関数のパラメータを日経平均オプションの超過需要関数の推定に利用できるものと考えられる．数値計算で求めた日経平均オプションの超過需要関数を利用して，各証券会社の日経平均オプションのポジションも逆算可能であることも示した．

このような逆算を行った理由は，各証券会社が日経平均オプションでどれくらいのポジションを保有しているのかは全くわからないからである．現物の市場あるいは現実の経済自体に影響を与えるのは先物やオプション契約だけではない．最近の世界的な景気低迷によって各国は景気対策を行ったために財政支出が増えたため，各国政府の財政が悪化していることを利用した国債のクレジット・デフォルタブル・スワップと国債の空売りを組み合わせた取引行動を規制する動きがみられる．そのためオプション市場を含めたデリバティブ市場での個別主体別の行動を分析することが重要となってきている．

日経平均オプションの証券会社別の超過需要関数を求めるためには，個別証券会社の予想価格分布の標準偏差を推定する必要がある．本稿においては日経平均先物の証券会社別の超過需要関数のパラメータを利用して個別の証券会社の予想価格分布の標準偏差を求めることができた．ただ予想価格分布の標準偏差を計算するためには，現在のままでは複雑すぎるという欠点がある．より簡単に計算することができれば実務的にも非常に有用なものとなるであろう．本

稿ではドイツ証券とソシエテジェネラル証券の予想価格分布の標準偏差を計算した．

予想価格分布の標準偏差を複雑な形でしか求められない理由は，日経平均先物超過需要関数が説明変数が1つの線型であると，3つ以上のパラメータは求められないことである．本稿で計測を行った個別証券会社の日経平均先物超過需要曲線の傾きを示すパラメータは $1/(a\sigma^2)$ であり，絶対的危険回避度aと予想価格分布の分散 σ^2 を分離して計測することは不可能である．そこで富wに関する負の指数型効用関数の絶対的危険回避度aは対数型効用関数における初期の富 w_0 の逆数 $1/w_0$ の近似値を与えることを利用した．

$1/(a\sigma^2)$ は超過需要関数のパラメータとして推定されているために，$a=1/w_0$ の値に様々な値を与えて，σ^2 の値を計算して求めた．測定できるのは各証券会社の超過需要関数であって，各証券会社で取引する顧客の超過需要関数を測定することは不可能である．そのため各証券会社の顧客の予想価格分布のパラメータは同一であると仮定する必要がある．また各証券会社の予想価格分布の標準偏差を計算するには，その証券会社を通じて取引をする取引者の数を確定する必要がある．取引者の数を十分に大きくすることで，ある一定の値に収束するのかを試してみたが，ドイツ証券の超過需要関数のパラメータを利用した場合には，何らかの値に収束することはなかった．収束するのであれば，収束することを選択基準として，その値を予想価格分布の標準偏差として採用するかどうかを決定することができた．またソシエテジェネラル証券の場合も同様に収束することはなかった．

予想価格分布が正規分布であるとすると，絶対的危険回避度aを与えて，取引者の数を大きくしていった場合に求められる予想価格分布の標準偏差の 3σ を計算し，同じく超過需要関数のパラメータとして計算される予想価格分布の期待値からマイナス 3σ の値を考えると，この値がマイナスになる場合がある．これはドイツ証券とソシエテジェネラル証券の両証券について共通にいえることである．日経平均の値がマイナスになることは非現実的であるから，ある一定の値に取引者の数を制限して，予想価格分布の標準偏差を計算することとし，予想価格分布の期待値からマイナス 3σ の値が0近辺になるような標

準偏差の値を選択することにした．その結果，ドイツ証券の予想価格分布の標準偏差は約3561円，ソシエテジェネラル証券の予想価格分布の標準偏差は約4691円となった．

このような形で予想価格分布の標準偏差を推定し,各証券会社の日経平均オプションの超過需要関数を計算した場合の問題点としては以下の点があげられる．すなわち，どの権利行使価格で取引をするのかを現在のモデルでは特定化することができないことである．日経平均オプションの場合，売買自体が非常に多いわけではない．いわゆるイン・ザ・マネーで取引を行うのは，売買が最も活発なオプションクラスであるためである．アウト・オブ・ザ・マネーのオプションでは参加する取引者が少ないため，売買を行いたくてもできない場合が多い．売買ができない場合の損失を考慮したモデルを考えることも必要であると思われる．しかしモデルとしてはより一層複雑さを増すであろう．取引所に詳しいデータを提供してもらえば，この点は修正される．

本稿で示したようにオプションの超過需要関数を求めるためには，現在利用可能なデータを最大限に利用したとしても，かなり複雑な手続きを踏まなければならないため，かなり分かりにくいものとなってしまった．本稿をさらに発展させるには日経平均オプションの証券会社別建玉のデータから直接的に非線形推定を行うことが必要である．

本稿では日経平均先物の超過需要関数のパラメータを利用して計測しているが，そこから明らかとなる予想価格分布は３カ月後のものである．オプションは１カ月後になる．試論的に３カ月後の予想分布を用いてみたが，１カ月後の予想価格分布にする必要があろう．

現在のままでは様々な問題点があるが，各取引主体の予想価格分布が分かると，これをそのまま資産の評価に用いることが可能である．そのため崩壊してしまった無裁定理論ではなく本来の経済学の枠内での資産の評価を構築することも可能であると思われる．

10　補論

ここでは

$$m(x)=n(x;\ln S+rT-(g^2+v^2)T/2,\ (g^2+v^2)T)$$

となることを証明しよう．

正規分布の確率密度関数は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx,\quad -\infty<x<\infty$$

である．

$$m(x)=\int_{-\infty}^{\infty}n(x;y-v^2T,\ v^2T/2)\,n(y;\ln S+rT-g^2T/2,\ g^2T)\,dy$$

において

$$n(x;y-v^2T,\ v^2T/2)\,n(y;\ln S+rT-g^2T/2,\ g^2T)$$

の部分だけを考えてみる．すると，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}g}\exp\left(-\frac{(x-(\ln S+rT-g^2T))^2}{2g^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\exp\left(-\frac{(x-(y-v^2T))^2}{2v^2}\right)$$

ここで

$$-\frac{(l-A)^2}{2s^2}-\frac{(l-\eta)^2}{2\sigma^2}=-\frac{(l-A)^2 2\sigma^2-2s^2(l-\eta)^2}{2s^2 2\sigma^2}=-\frac{l-\dfrac{A\sigma^2+\eta s^2}{s^2+\sigma^2}}{2(s^{-2}+\sigma^{-2})}-\frac{(\eta-A)^2}{2(s^2+\sigma^2)}$$

という関係を利用する．ここで

$$-(l-A)^2 2\sigma^2-2s^2(l-\eta)^2=-(l^2-2Al+A^2)\ 2\sigma^2-2s^2(l^2-2l\eta+\eta^2)$$
$$=-2l^2\sigma^2-2s^2l^2+4Al\sigma^2+4l\eta s^2-2A^2\sigma^2-2s^2\eta^2$$

となるので，l についてまとめると，

$$-(l-A)^2 2\sigma^2-2s^2(l-\eta)^2=-2(\sigma^2+s^2)l^2+4l(A\sigma^2+\eta s^2)-2A^2\sigma^2-2s^2\eta^2$$

右辺を σ^2+s^2で割ってみる.

$$-2l^2+\frac{4l(A\sigma^2+\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}-\frac{2A^2\sigma^2}{\sigma^2+s^2}-\frac{2s^2\eta^2}{\sigma^2+s^2}$$

少し整理すると

$$-2\left\{l^2+2\frac{l(A\sigma^2+\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}\right\}-\frac{2A^2\sigma^2}{\sigma^2+s^2}-\frac{2s^2\eta^2}{\sigma^2+s^2}$$

もう少し整理すると

$$-2\left\{l+\frac{l(A\sigma^2+\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}\right\}^2+2\left\{\frac{(A\sigma^2+\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}\right\}^2-\frac{2A^2\sigma^2}{\sigma^2+s^2}-\frac{2s^2\eta^2}{\sigma^2+s^2}$$

ここで

$$2\left\{\frac{(A\sigma^2+\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}\right\}^2-\frac{2A^2\sigma^2}{\sigma^2+s^2}-\frac{2s^2\eta^2}{\sigma^2+s^2}$$

だけを考えてみる.

$$2\left\{\frac{(A\sigma^2+\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}\right\}^2-\frac{2A^2\sigma^2(\sigma^2+s^2)}{(\sigma^2+s^2)^2}-\frac{2s^2\eta^2(\sigma^2+s^2)}{(\sigma^2+s^2)^2}$$

展開すると

$$2\frac{(A^2\sigma^4+\eta^2s^4+2\sigma^2\eta s^2)}{(\sigma^2+s^2)^2}-\frac{2A^2\sigma^4+2A^2\sigma^2s^2}{(\sigma^2+s^2)^2}-\frac{2s^2\eta^2\sigma^2+2\eta^2s^4}{(\sigma^2+s^2)^2}$$

整理すると

$$2\frac{(2A\sigma^2\eta s^2)}{(\sigma^2+s^2)^2}-\frac{2A^2\sigma^2s^2}{(\sigma^2+s^2)^2}-\frac{2s^2\eta^2\sigma^2}{(\sigma^2+s^2)^2}$$

計算すると

$$2\frac{(2A\sigma^2\eta s^2-A^2\sigma^2s^2-s^2\eta^2\sigma^2)}{(\sigma^2+s^2)^2}$$

まとめると

$$2\frac{(2A\eta-A^2-\eta^2)s^2\sigma^2}{(\sigma^2+s^2)^2}$$

これは

$$-2\frac{(\eta-A)^2s^2\sigma^2}{(\sigma^2+s^2)^2}$$

となるから，$s^2+\sigma^2$をかけてもとに戻す．

$$-2\frac{(\eta-A)^2s^2\sigma^2}{(\sigma^2+s^2)}$$

$4s^2\sigma^2$で割ると

$$-\frac{(\eta-A)^2}{2(\sigma^2+s^2)}$$

これで証明したい式の右辺第２項を証明することはできた．

$$-2\left\{l-\frac{(A\sigma^2-\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}\right\}^2$$

についても $s^2+\sigma^2$をかけてもとに戻す．

$$-2\left\{l-\frac{(A\sigma^2+\eta s^2)}{\sigma^2+s^2}\right\}^2(s^2+\sigma^2)$$

$4s^2\sigma^2$で割り，$s^2\sigma^2=(s^{-2}+\sigma^{-2})^{-1}(s^2+\sigma^2)$ を利用すると，

$$-\frac{\left\{l-\frac{A\sigma^2+\eta s^2}{s^2+\sigma^2}\right\}}{2(s^{-2}+\sigma^{-2})^{-1}}$$

$A=\ln S+rT-g^2T/2$，$\eta=x+v^2T/2$とすると

$$\eta-A=x+v^2T/2-\ln S-rT+g^2T/2$$

となるため，本文中の式を導出することができる．なおこの補論は Iwata［1994］を参考にしている．

11　参考文献

Black, Fisher and Myron Scholes [1973] "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy, Vol.81, pp.637－659.

Iwata, G. [1994] "An Options Premium Model with Heterogeneous Expectations," KEO Discussion Paper No.36.

新井啓［2004］「商品先物市場における価格操作行動の計量分析」『商品取引所論体系』第12巻，全国商品取引所連合会，pp.375－398.

新井啓［2007］「個別会員の経済行動の計量分析（日経平均先物と商品先物との違い)」，『商品取引所論体系』第13巻，全国商品取引所連合会，pp.146－186.

新井啓［2009a］「手口表による日経平均先物需要曲線の測定」明海大学『経済学論集』，Vol.21，No.1，pp.1－13.

新井啓［2009b］「期待の異質性の計測」明海大学『経済学論集』，Vol.22，No.1，pp.1－13.

新井啓［2010a］「日経225先物市場における建玉の共変動の利用による個別証券会社超過需要関数の計測」立正大学『経済学季報』，59－3.

新井啓［2010b］「異質的期待仮説を前提とした個別取引主体の予想株価確率分布期待値の推定とその統計的特性」明海大学『経済学論集』，Vol.22，No.1，pp.1－13.

新井啓［2010c］「日経225先物2007年６月限の証券会社別超過需要関数の計測」立正大学『経済学季報』，59－4.

岩田暁一［1989］『先物とオプションの理論』東洋経済新報社.

岩田暁一編著［1997］『先物・オプションの計量分析』慶応大学出版会.